

数チャレ 第47回 (2004年12月)

- (1) 3以上の整数 n に対して, n を割らない素数のうち最小のものを p とする。 $n < p^2$ ならば, 1 と n の間にある n と互いに素な整数はすべて素数であることを示せ。
- (2) n が相異なる4つの素数の積であるとき, 1 と n の間に n と互いに素な合成数があることを示せ。
- (3) 3以上の整数 n に対して, 1 と n の間にある n と互いに素な整数がすべて素数となるような n をすべて求めよ。必要ならば, Chebyshev の定理(任意の2以上の整数 m に対して, m 以上 $2m$ 未満の素数が存在する)を用いてもよい。

解答

- (1) 1 と n の間にある n と互いに素な整数 a の素因数分解を

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \quad (p_1 < p_2 < \cdots < p_r, e_k > 0)$$

とすると,

$$p \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$$

となるから,

$$a \geq p^{e_1 + e_2 + \cdots + e_r}$$

$a < n < p^2$ より

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_r = 1 \quad \therefore r = 1, e_1 = 1$$

よって, $a = p_1$ は素数である。

(証明おわり)

- (2) n の素因数分解を $n = p_1 p_2 p_3 p_4$ ($p_1 < p_2 < p_3 < p_4$) とし, n を割らない最小の素数を p とする。

(i) $p = 2 < p_1$ のとき, $p_1 p_2 p_3 p_4 > 2^4 > 2^2$

(ii) $p_1 = 2, p = 3$ のとき, $p_1 p_2 p_3 p_4 > 2 \times 3^3 > 3^2$

(iii) $p_1 = 2, p_2 = 3, p = 5$ のとき, $p_1 p_2 p_3 p_4 > 2 \times 3 \times 5^2 > 5^2$

(iv) $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ のとき, $p_1 p_2 p_3 p_4 \geq 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210 > 11^2$

よって, $n > p^2$ であり, 1 と n の間に n と互いに素な合成数 p^2 が存在する。

(証明おわり)

- (3) 3以上の整数 n を割らない最小の素数 p が $n < p^2$ を満たすことは, 1 と n に間にある n と互いに素な整数がすべて素数であることと同値であることに注意する。

1° n の素因数が4個以上のとき

n の4つの素因数のうち大きい方から4つを p_1, p_2, p_3, p_4 とすると, Chebyshev の定理により $p < 2p_1, p < 2p_2$ であるから

$$n \geq p_1 p_2 p_3 p_4 > p^2$$

2° n の素因数が 3 個のとき

(i) $p = 2$ または 3 または 5 のとき, $n \geq 2 \times 3 \times 7 > 5^2 > 3^2 > 2^2$

(ii) $p = 7$ のとき, $n = 2^a 3^b 5^c$ (a, b, c は正の整数) と表され, $n < 7^2$ より

$$a = b = c = 1 \quad \therefore n = 30$$

3° n の素因数が 2 個のとき

(i) $p = 2$ または 3 のとき, $n \geq 2 \times 5 > 3^2 > 2^2$

(ii) $p = 5$ のとき, $n = 2^a 3^b$ (a, b は正の整数) と表され, $n < 5^2$ より

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1)$$

$$\therefore n = 6, 18, 12, 24$$

4° n の素因数が 1 個のとき

(i) $p = 2$ のとき, $n = q^a$ (q は素数, a は正の整数) と表され, $3 \leq n < 2^2$ より

$$q = 3, a = 1 \quad \therefore n = 3$$

(ii) $p = 3$ のとき, $n = 2^a$ (a は正の整数) と表され, $3 \leq n < 3^2$ より

$$a = 2, 3 \quad \therefore n = 4, 8$$

以上より, 求める整数 n は

$$n = 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30 \quad (\text{答})$$