

数チャレ 第48回 (2005年1月)

(1) 5で割り切れない自然数 n に対して

$$a^2 + b^2 = 5n$$

を満たす自然数 a, b が存在するとき,

$$(x, y) = \left(\frac{a+2b}{5}, \frac{2a-b}{5} \right) \text{ または } \left(\frac{2a+b}{5}, \frac{-a+2b}{5} \right)$$

は方程式 $x^2 + y^2 = n$ の整数解の組となることを示せ。

(2) $x^2 + y^2 = 2005$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

解答

(1) k を整数として

$$(5k)^2 = 5 \cdot 5k^2$$

$$(5k \pm 1)^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$$

$$(5k \pm 2)^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$$

となるから, 平方数を5で割った余りは0, 1, 4のいずれかである。したがって, n が5で割り切れないことに注意すると,

$$a^2 + b^2 = 5n$$

を満たす自然数 a, b は

$$a^2 \equiv 1, b^2 \equiv 4 \pmod{5} \text{ または } a^2 \equiv 4, b^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

を満たす。

a, b の対称性より, $a^2 \equiv 1, b^2 \equiv 4 \pmod{5}$ だけ考えれば十分であり, 次の4つの場合に集約される。

(i) $a \equiv 1, b \equiv 2 \pmod{5}$ のとき, $a + 2b \equiv 0, 2a - b \equiv 0 \pmod{5}$

(ii) $a \equiv 1, b \equiv 3 \pmod{5}$ のとき, $2a + b \equiv 0, -a + 2b \equiv 0 \pmod{5}$

(iii) $a \equiv 4, b \equiv 2 \pmod{5}$ のとき, $2a + b \equiv 0, -a + 2b \equiv 0 \pmod{5}$

(iv) $a \equiv 4, b \equiv 3 \pmod{5}$ のとき, $a + 2b \equiv 0, 2a - b \equiv 0 \pmod{5}$

ゆえに,

$$(x, y) = \left(\frac{a+2b}{5}, \frac{2a-b}{5} \right) \text{ または } \left(\frac{2a+b}{5}, \frac{-a+2b}{5} \right)$$

のいずれか一方は整数の組となり,

$$(a+2b)^2 + (2a-b)^2 = (2a+b)^2 + (-a+2b)^2 = 5(a^2 + b^2)$$

より, $x^2 + y^2 = n$ の整数解となる。

(証明おわり)

(2) $2005 = 5 \times 401$ であるから ,

$$x^2 + y^2 = 2005$$

の自然数解 (a, b) に対して , (1)の操作により $x^2 + y^2 = 401$ の整数解 (c, d) が一意に定まる。このとき ,

$$(a, b) = (c + 2d, 2c - d) \text{ または } (2c - d, c + 2d)$$

である。 $c^2 + d^2 = 401$ より

$$(c, d) = (\pm 1, \pm 20), (\pm 20, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

であり , $-d$ と $2d$ の一方は必ず負であるから ,

$$a > 0, b > 0 \text{ ならば } d \neq \pm 20$$

が成り立つ。 $c = -20$ のときも $c + 2d < 0, 2c - d < 0$ となるから ,

$$c = 20$$

の場合に限られてしまう。

$$(i) \ c = 20, d = 1 \text{ のとき , } c + 2d = 22, 2c - d = 39$$

$$(ii) \ c = 20, d = -1 \text{ のとき , } c + 2d = 18, 2c - d = 41$$

以上より , 不定方程式 $x^2 + y^2 = 2005$ の自然数解は

$$(x, y) = (22, 39), (39, 22), (18, 41), (41, 18) \text{ (答)}$$

ですべてである。