

数チャレ 第49回(2005年2月)

$xy + yz + zx = 17$ を満たす自然数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

解答

$(1 \leq) x \leq y \leq z$ とすると

$$xy \leq xz \leq yz$$

であるから, $3xy \leq xy + yz + zx = 17$ より

$$xy \leq \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

x, y は $x \leq y$ を満たす自然数であるから,

$$(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2)$$

(i) $x = y = 1$ のとき

$$1 + z + z = 17 \quad \therefore z = 8$$

(ii) $x = 1, y = 2$ のとき

$$2 + 2z + z = 17 \quad \therefore z = 5$$

(iii) $x = 1, y = 3$ のとき

$$3 + 3z + z = 17 \quad \therefore z = \frac{7}{2} \text{ となって不適}$$

(iv) $x = 1, y = 4$ のとき

$$4 + 4z + z = 17 \quad \therefore z = \frac{13}{5} \text{ となって不適}$$

(v) $x = 1, y = 5$ のとき

$$5 + 5z + z = 17 \quad \therefore z = 2 \text{ となって } y \leq z \text{ に反する}$$

(vi) $x = y = 2$ のとき

$$4 + 2z + 2z = 17 \quad \therefore \text{左辺は偶数, 右辺は奇数で矛盾}$$

以上より, $x \leq y \leq z$ とすると

$$(x, y, z) = (1, 1, 8), (1, 2, 5)$$

x, y, z の並び順も考えて

$$\begin{aligned} (x, y, z) = & (1, 1, 8), (1, 8, 1), (8, 1, 1), \\ & (1, 2, 5), (1, 5, 2), (2, 1, 5), \\ & (2, 5, 1), (5, 1, 2), (5, 2, 1) \end{aligned}$$

(答)