

数チャレ 第50回(2005年3月)

a は実数とし, x に関する2次方程式

$$x^2 + ax + (a-1)^2 = 0$$

は相異なる2つの実数解をもつ。2つの解の差が整数であるとき, a の値を求めよ。

出典: 2005年 千葉大学

解答

2次方程式 $x^2 + ax + (a-1)^2 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4(a-1)^2 = -3a^2 + 8a - 4$$

であり, 相異なる2実数解をもつことより

$$D = -3a^2 + 8a - 4 > 0$$

この範囲のもとで, 2実数解は

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2}$$

であるから,

$$2 \text{ 解の差は } \sqrt{D}$$

である。

$$D = -3\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} > 0 \text{ より}$$

$$0 < D < \frac{4}{3}$$

であるから, 2解の差 \sqrt{D} が整数(D が平方数)であるとすれば

$$D = -3a^2 + 8a - 4 = 1$$

となり,

$$3a^2 - 8a + 5 = 0$$

$$(a-1)(3a-5) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ または } \frac{5}{3} \text{ (答)}$$