

## 数チャレ 第51回(2005年4月)

(1) すべての整数  $m$  に対して  $\frac{pm}{m^2 - m - 1}$  がつねに整数となるような定数  $p$  を求めよ。

(2)  $a, b$  を定数として整式  $f(x)$  を

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx - a - 2$$

によって定義する。すべての整数  $m$  に対して  $\frac{f(m)}{m^2 - m - 1}$  がつねに整数となるための必要十分条件を  $a, b$  を用いて表せ。

出典：2005年 北海道大学

### 解答

(1)  $m$  が十分大きいと

$$\left| \frac{pm}{m^2 - m - 1} \right| = \left| \frac{p}{m - 1 - \frac{1}{m}} \right| < 1$$

となるから、すべての整数  $m$  に対して  $\frac{pm}{m^2 - m - 1}$  がつねに整数になるとすれば、

$$\frac{pm}{m^2 - m - 1} = 0 \quad \therefore p = 0 \quad (\text{答})$$

(2)  $F(m) = \frac{f(m)}{m^2 - m - 1}$  とおく。

$$F(0) = -f(0) = a + 2, \quad F(1) = -f(1) = b - 1$$

はともに整数であるから、

$a, b$  は整数

であることが必要である。

$$\begin{aligned} f(m) &= m^4 + am^2 + bm - a - 2 \\ &= (m^2 - m - 1)(m^2 + m + a + 2) + (a + b + 3)m \end{aligned}$$

より

$$F(m) = m^2 + m + a + 2 + \frac{(a + b + 3)m}{m^2 - m - 1}$$

と表され、 $m^2 + m + a + 2$  は整数であるから、すべての整数  $m$  に対して  $F(m)$  がつねに整数となるための条件は、(1)とあわせて

$$a \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad a + b + 3 = 0 \quad (\text{答})$$

(注) 他にも同値な表現はいろいろある。なお、 $\mathbb{Z}$  は整数の集合を表す。