

## 数チャレ 第52回 (2005年5月)

不定方程式  $3x^3 = 5y^5$  の自然数解を求めよ。

解答

$$3x^3 = 5y^5$$

の両辺に  $3^5 5^9$  をかけて

$$3^6 5^9 x^3 = 3^5 5^{10} y^5 \quad \therefore (3^2 5^3 x)^3 = (3 \cdot 5^2 y)^5$$

素因数分解を考えると、3と5は互いに素であるから

$$3^2 5^3 x = m^5, \quad 3 \cdot 5^2 y = m^3$$

を満たす自然数  $m$  が存在する。ここで、 $m$  は  $3 \times 5$  で割り切れるから、

$$m = 3 \cdot 5 \cdot n \quad (n \text{ は自然数})$$

とおき直すことができ、

$$x = 3^3 5^2 n, \quad y = 3^2 \cdot 5 n$$

$$\therefore x = 675n, \quad y = 45n \quad (n \text{ は自然数}) \quad (\text{答})$$

(注) 与えられた方程式の両辺に  $3^p 5^q$  をかけると

$$3^{p+1} 5^q x^3 = 3^p 5^{q+1} y^5$$

となるから、 $3^5 5^9$  を見つけるには

$$\begin{cases} p+1 = 3a & \dots\dots \textcircled{1} \\ p = 5b & \end{cases} \quad \begin{cases} q = 3c & \dots\dots \textcircled{2} \\ q+1 = 5d & \end{cases}$$

を満たす自然数  $a, b, c, d$  を定め、最小の自然数  $p, q$  を求めればよい。

①より  $p$  を消去して

$$3a - 5b = 1$$

$3 \times 2 - 5 \times 1 = 1$  を辺々から引いて

$$3(a-2) - 5(b-1) = 0 \quad \therefore 3(a-2) = 5(b-1)$$

3と5は互いに素であるから、ある非負整数  $k$  を用いて

$$a-2 = 5k, \quad b-1 = 3k \quad \therefore a = 5k+2, \quad b = 3k+1$$

①に代入して

$$p = 15k + 5 \quad (k \text{ は非負整数})$$

②より  $q$  を消去して

$$5d - 3c = 1 \quad \therefore 5(d-2) = 3(c-3)$$

5と3は互いに素であるから、ある整数非負  $l$  を用いて

$$c-3 = 5l, \quad d-2 = 3l \quad \therefore c = 5l+3, \quad d = 3l+2$$

②に代入して

$$q = 15l + 9 \quad (l \text{ は非負整数})$$