

数チャレ 第53回 (2005年6月)

$a_n = 2^{2^n} + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。

(1) a_{n+1} を a_n で表せ。

(2) 異なる自然数 m, n に対して, a_m と a_n は互いに素であることを示せ。

解答

(1) $a_{n+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n})^2 - 1 = (a_n - 1)^2$ より

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1 \quad (\text{答})$$

(2) $m > n$ として示せば十分である。二項定理を用いると

$$\begin{aligned} a_m &= (2^{2^n})^{2^{m-n}} + 1 \\ &= (a_n - 1)^{2^{m-n}} + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{2^{m-n}} {}^{2^{m-n}}C_k (-1)^{2^{m-n}-k} a_n^k + 1 \\ &= (a_n \text{ の倍数}) + (-1)^{2^{m-n}} + 1 \\ &= (a_n \text{ の倍数}) + 2 \end{aligned}$$

と変形され,

$\gcd(a_m, a_n)$ は 2 を割る正の整数

であることがわかるが,

$$a_n = 2^{2^n} + 1 \text{ は奇数}$$

であるから

$$\gcd(a_m, a_n) = 1$$

したがって, a_m と a_n は互いに素である。

(証明おわり)