

## 数チャレ 第54回(2005年7月)

$n$  を 3 以上の整数とする。

- (1)  $k$  を  $n$  と互いに素な整数とすると、 $n - k$  も  $n$  と互いに素な整数であることを示せ。
- (2) 0 と 1 の間にある分母を  $n$  とする既約分数の総和は整数であることを示せ。

解答 (1)  $n - k$  と  $n$  が互いに素でないとするれば、

$$p \mid n - k, \quad p \mid n$$

となる素数  $p$  が存在する。このとき、

$$p \mid k, \quad p \mid n$$

となって、 $k$  と  $n$  は互いに素でない。

対偶をとると、 $k$  と  $n$  が互いに素な整数とすると、 $n - k$  と  $n$  は互いに素である。  
(証明おわり)

- (2) 0 と  $\frac{1}{2}$  の間にある  $n$  を分母とする既約分数を

$$\frac{a_1}{n}, \frac{a_2}{n}, \dots, \frac{a_m}{n}$$

とする。(1)より

$$\frac{n - a_1}{n}, \frac{n - a_2}{n}, \dots, \frac{n - a_m}{n}$$

も  $n$  を分母とする既約分数であり、 $\frac{1}{2}$  と 1 の間にあるものはこれらで尽くされる。

よって、0 と 1 の間にある  $n$  を分母とする既約分数の総和は

$$\sum_{k=1}^m \frac{a_k}{n} + \sum_{k=1}^m \frac{n - a_k}{n} = \sum_{k=1}^m \left( \frac{a_k}{n} + \frac{n - a_k}{n} \right) = \sum_{k=1}^m 1 = m$$

となって、整数である。

(証明おわり)

(注)

- 1°  $n = 2$  のときは、0 と 1 の間にある分母を  $n$  とする既約分数は  $\frac{1}{2}$  だけとなって、この命題は成り立たない。
- 2° 事実上、 $n$  が 3 以上の自然数であるとき、 $n$  と互いに素な  $n$  以下の自然数が偶数個あることを示したことになる。