

数チャレ 第55回 (2005年8月)

x, y は互いに素な正の整数であるとする。

- (1) $x + y$ と $x^2 - xy + y^2$ の最大公約数は 1 または 3 であることを示せ。
- (2) $x^3 + y^3 = 3^z$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

解答

(1) $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$ ($x + y > 0, xy > 0$) であるから

$$\gcd(x + y, x^2 - xy + y^2) = \gcd(x + y, 3xy) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで, $x + y$ と x に共通な素因数 p があるとすれば, y も p で割り切れて互いに素であることに反するから,

$$\gcd(x + y, x) = 1$$

同様に $\gcd(x + y, y) = 1$ も成り立つから

$$\gcd(x + y, xy) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

3 が素数であることに注意すると, ①かつ②より

$$\gcd(x + y, x^2 - xy + y^2) = \gcd(x + y, 3) = 1 \text{ または } 3$$

(証明おわり)

(2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, $x + y \geq 2$ であるから, (1)より

$$(x + y, x^2 - xy + y^2) = (3^z, 1), (3, 3^{z-1}), (3^{z-1}, 3)$$

の場合に限られる。

(i) $x + y = 3^z, x^2 - xy + y^2 = 1$ のとき

$$x^2 - x(3^z - x) + (3^z - x)^2 = 1$$

$$\therefore 3x^2 - 3^{z+1}x + 3^{2z} = 1$$

左辺は 3 の倍数であるから不適である。

(ii) $x + y = 3$ のとき

$$(x, y) = (1, 2) \text{ または } (2, 1)$$

であり,

$$3^z = 1^3 + 2^3 = 9 \quad \therefore z = 2$$

(iii) $x + y = 3^{z-1}$ ($z \geq 2$), $x^2 - xy + y^2 = 3$ のとき

$$x^2 - x(3^{z-1} - x) + (3^{z-1} - x)^2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 3^{z-1}x + (3^{2z-3} - 1) = 0$$

2 次方程式が整数解をもつことより

$$(\text{判別式}) = (3^{z-1})^2 - 4(3^{2z-3} - 1) = 4 - 3^{2z-3}$$

が平方数となる必要があるが, $3^{2z-3} \geq 3^1$ より

$$3^{2z-3} = 3 \text{ すなわち } z = 2$$

のときに限られる。このとき (ii) と同じになる。

以上より

$$(x, y, z) = (1, 2, 2), (2, 1, 2) \quad (\text{答})$$