

## 数チャレ 第56回(2005年9月)

- (1) 奇数の平方は8で割ると1余ることを示せ。  
(2)  $a, b, c$ を奇数とするとき, 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は有理数でないことを示せ。

### 解答

- (1) 奇数は  $2n + 1$  ( $n$  は整数) と表されて, 平方すれば

$$(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$$

隣り合う整数  $n, n + 1$  の一方は偶数であるから, 奇数の平方は8で割ると1余る。  
(証明おわり)

- (2) 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

であり,  $a, b, c$  は整数であるから,

$$\begin{aligned} \text{解 } x \text{ が有理数} &\iff \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ が有理数} \\ &\iff b^2 - 4ac \text{ が平方数} \end{aligned}$$

と言い換えられる。

解  $x$  が有理数であるとすれば,

$$b^2 - 4ac = m^2 \quad (m \text{ は整数})$$

と表され,  $b$  は奇数で  $4ac$  は偶数であるから

$$m \text{ は奇数}$$

である。(1)より  $b^2$  も  $m^2$  も8で割ると1余るから

$$4ac = b^2 - m^2 \text{ は } 8 \text{ の倍数}$$

となり,  $ac$  が奇数であることと矛盾する。

よって, 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は有理数でない。

### (注)

1° 整数解をもたないことであらば, もっと簡単に示される。

$a, b, c$  は奇数であるから, 任意の整数  $n$  に対して

$$an^2 + bn + c \equiv n^2 + n + 1 \pmod{2}$$

$n^2 + n = n(n + 1)$  は偶数であるから  $an^2 + bn + c$  は奇数となり,

$$an^2 + bn + c \neq 0$$

が導かれる。

2° (1)を用いないで, 有理数解をもたないことを示すことができる。

2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が有理数解  $\frac{p}{q}$  ( $p$  と  $q$  は互いに素な整数) をもつとすると,

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \cdot \frac{p}{q} + c = 0$$
$$\therefore ap^2 + bpq + cq^2 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

(\*) を

$$ap^2 = q(-bp - cq)$$

とみると  $ap^2$  は  $q$  の倍数であるが,  $p$  と  $q$  は互いに素であるから,  $a$  は  $q$  の倍数である。  $q$  は奇数  $a$  の約数であるから,

$q$  は奇数

である。

同様にして,  $p$  は奇数  $c$  の約数であるから,

$p$  は奇数

であることも導かれる。

よって,  $ap^2$ ,  $bpq$ ,  $cq^2$  はすべて奇数であり,

$ap^2 + bpq + cq^2$  は奇数

となって (\*) と矛盾するから, 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は有理数でない。

(証明おわり)

3° 「有理数でない」といっても, 無理数(実数)の場合も虚数の場合もあり得る。