

数チャレ 第60回 (2006年1月)

今年(西暦2006年、平成18年)であるが、2006と18の最大公約数は2であり、2006は17の倍数である。つまり、西暦年と平成年の最大公約数は2であり、西暦年が前年の平成年の倍数である。

21世紀内で、このような条件を満たす西暦年をすべて求めよ。ただし、平成は21世紀中は続くものとする。

解答

条件を満たす西暦年を x 、その平成年を y とすると、条件は

$$\begin{cases} x = y + 1988 & \dots\dots ① \\ gcd(x, y) = 2 & \dots\dots ② \\ x = (y - 1)z \quad (z \text{ は自然数}) & \dots\dots ③ \\ 2001 \leq x \leq 2100 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

①かつ②より x を消去すると、互除法により

$$2 = gcd(y + 1988, y) = gcd(1988, y) \quad \dots\dots ⑤$$

①かつ③より x を消去すると

$$\begin{aligned} y + 1988 &= (y - 1)z \\ \therefore (y - 1)(z - 1) &= 1989 = 3^2 \times 13 \times 17 \quad \dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

1988は4で割り切れるから、⑤より必要条件として

$$y \equiv 2 \pmod{4} \quad \therefore y - 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

⑥より、これを満たすのは

$$\begin{aligned} y - 1 &= 1, 13, 17, 13 \times 17, 3^2, 3^2 \times 13, 3^2 \times 17, 3^2 \times 13 \times 17 \\ \therefore y &= 2, 14, 18, 222, 10, 118, 154, 1990 \end{aligned}$$

に限られる。①かつ④より

$$13 \leq y \leq 112$$

となることを考えて、

$$y = 14 \text{ または } 18$$

1988 = $2^2 \times 7 \times 71$ に注意して⑤をチェックすると

$$gcd(1988, 14) = 14, \quad gcd(1988, 18) = 2$$

であるから、条件を満たすのは $y = 18$ のときだけであり、求める西暦年は
2006年 (答)

のみである。

(注) 条件④をはずすと、 $y = 2, 10, 118, 222, 1990$ も条件を満たす。ただ、平成118、222、1990年も解だと言われてもなんだか空しい。