

数チャレ 第64回 (2006年5月)

$2^{2n} + 3^{2n}$ が 13 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

解答

$2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ であるから, $2^{2n} + 3^{2n}$ を 13 で割った余りは n について 6 を周期とする。

$$2^2 + 3^2 = 13$$

$$2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97 \equiv 6 \pmod{13}$$

$$2^6 + 3^6 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

$$2^8 + 3^8 \equiv -2^2 + 3^2 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$2^{10} + 3^{10} \equiv -2^4 + 3^4 \equiv -16 + 81 \equiv 0 \pmod{13}$$

$$2^{12} + 3^{12} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{13}$$

であるから,

$$13 \mid 2^{2n} + 3^{2n} \iff n \text{ は奇数} \quad (\text{答})$$

別解

n が正の奇数ならば,

$$2^{2n} + 3^{3n} = 4^n + 9^n$$

$$= (4 + 9)(4^{n-1} - 4^{n-2} \cdot 9 + 4^{n-3} \cdot 9^2 - \dots + 9^{n-1})$$

$$= 13 \times (4^{n-1} - 4^{n-2} \cdot 9 + 4^{n-3} \cdot 9^2 - \dots + 9^{n-1})$$

は 13 で割り切れる。

n が正の偶数 ($n-1$ が正の奇数) ならば,

$$2^{2n} + 3^{3n} = 4(2^{2(n-1)} + 3^{2(n-1)}) + 5 \cdot 3^{2(n-1)}$$

$$\equiv 5 \cdot 3^{2(n-1)} \pmod{13}$$

は 13 で割り切れない。

正の偶数と正の奇数ですべての自然数を尽くすから,

$$13 \mid 2^{2n} + 3^{2n} \iff n \text{ は奇数} \quad (\text{答})$$