

# 数チャレ 第65回 (2006年6月)

- (1)  $\sqrt[3]{2}$  が無理数であることを示せ。  
 (2) 整数  $a, b, c$  が  $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$  を満たすならば,  $a = b = c = 0$  であることを示せ。

解答

- (1)  $\sqrt[3]{2}$  が有理数であるとすれば,

$$\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} \quad (n \neq 0)$$

を満たす整数  $m, n$  が存在する。このとき,

$$2n^3 = m^3$$

となって, 素因数分解において両辺の 2 の指数が異なるので矛盾する。

(おわり)

- (2) 整数  $a, b, c$  が

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすならば, 両辺に  $\sqrt[3]{2}$  をかけると

$$2c + a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① ×  $b$  - ② ×  $c$  より

$$ab - 4c^2 + \sqrt[3]{2}(b^2 - ac) = 0$$

が成り立つが, ここで  $b^2 - ac \neq 0$  であるとすれば,  $\sqrt[3]{2}$  は整数比(有理数)となって

(1)で示したことに反するから,

$$b^2 - ac = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

このとき

$$ab - 4c^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③かつ④より

$$(abc \neq 0) \quad b^3 = 4c^3$$

$bc \neq 0$  であるとすれば, 4 が立方数(3乗数)でないことより素因数分解の一意性に反するから

$$b = c = 0$$

このとき, ①より

$$a = 0$$

(おわり)

(別解)  $c \neq 0$  とすると

$$\frac{b}{c} = p, \quad \frac{a}{c} = q$$

とおくことができ,  $x$  の恒等式

$$x^3 - 2 = (x^2 + px + q)(x - r) + sx + t \quad \dots\dots ⑤$$

を満たす有理数  $r, s, t$  が存在する。  $x = \sqrt[3]{2}$  を代入すると, ①より

$$s\sqrt[3]{2} + t = 0$$

(1)より  $\sqrt[3]{2}$  は無理数であるから

$$s = t = 0 \quad (s \neq 0 \text{ とすると矛盾する})$$

このとき, ⑤より

$$x^3 - 2 = (x^2 + px + q)(x - r)$$

が成り立ち,  $x = r$  を代入すると

$$r^3 - 2 = 0$$

となって,  $r$  が有理数であることと(1)とが矛盾する。

よって,

$$c = 0$$

①より

$$a + b\sqrt[3]{2} = 0$$

$a, b$  は整数(有理数)であるから, (1)より

$$a = b = 0$$

(おわり)