

数チャレ 第66回(2006年7月)

- (1) 自然数 m, n が $3^m - 1 = n^2$ を満たすならば, m, n はともに偶数であることを示せ。
(2) $3^m - 1 = n^2$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを示せ。

解答

- (1) 奇数の積は奇数であるから 3^m は奇数で

$$3^m - 1 = n^2 \text{ は偶数}$$

であり, 2 は素数であるから

$$n \text{ は偶数(2の倍数)}$$

である。

$$3^m = (4-1)^m = (4 \text{ の倍数}) + (-1)^m$$

であるから, $3^m - 1 = n^2$ より

$$(-1)^m - 1 \text{ は } 4 \text{ の倍数}$$

よって, m は偶数である。

(証明おわり)

- (2) 自然数 m, n が

$$3^m - 1 = n^2$$

を満たすとすると, n は 3 で割り切れないから

$$n = 3k \pm 1 \quad (k \text{ は整数})$$

と表され,

$$n^2 = 3(k^2 \pm 2k) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

一方,

$$3^m - 1 \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$$

であるから, 矛盾する。

よって, $3^m - 1 = n^2$ を満たす自然数 m, n は存在しない。

(証明おわり)

- (注) (1)の結果より

$$m = 2d \quad (d \text{ は自然数})$$

と表されることから,

$$3^m - 1 = (3^d + 1)(3^d - 1) = n^2$$

と変形して, $m = n = 0$ に限られることを導く解法も考えられる。

第20回(2002年9月)において,

10進法で各位がすべて等しい数は平方数にならないことを出題したが, 本問(2)は

3進法で各位がすべて2である数は平方数にならないことを表している。3進法で各位がすべて1である数の中には,

$$4 \text{ (3進法で } 11), 121 \text{ (3進法で } 11111)$$

など平方数になるものは存在する。