

## 数チャレ 第67回 (2006年8月)

- (1)  $m, n$  は  $0 < m < n$  を満たす整数とし,  $\frac{m}{n}$  以下の最大の単位分数を  $\frac{1}{p}$  ( $p$  は正の整数) とするとき,  $\frac{m}{n} - \frac{1}{p}$  の既約分数表示の分子は  $m$  より小さいことを示せ。
- (2) 1 より小さい正の有理数は, 相異なる単位分数 (分子は 1, 分母は正の整数) の有限和で表されることを示せ。

解答

$$(1) \quad \frac{m}{n} - \frac{1}{p} = \frac{mp - n}{np}$$

単位分数  $\frac{1}{p}$  の最大性より

$$p \geq 2, \quad \frac{1}{p} \leq \frac{m}{n} < \frac{1}{p-1} \quad \therefore 0 \leq mp - n < m$$

(おわり)

- (2) (1)において,

$$\frac{1}{p} - \left( \frac{m}{n} - \frac{1}{p} \right) = \frac{n - (mp - n)}{np} > \frac{m - (mp - n)}{np} > 0$$

であるから

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{p} < \frac{1}{p}$$

したがって, 1 より小さい正の有理数

$$q = \frac{m_1}{n_1} \quad (m_1, n_1 \text{ は } 0 < m_1 < n_1 \text{ を満たす整数})$$

に対して,  $\frac{1}{p_k}$  ( $p_k$  は 2 以上の整数) を  $\frac{m_k}{n_k}$  以下の最大の単位分数とし,

$$\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} = \frac{m_k}{n_k} - \frac{1}{p_k}, \quad \gcd(m_{k+1}, n_{k+1}) = 1 \quad \dots\dots\dots (*)$$

により正の整数から成る数列  $\{m_k\}, \{n_k\}$  を定めると,

$$(A) \quad m_1 > m_2 > m_3 > \dots \geq 1$$

$$(B) \quad p_1 < p_2 < p_3 < \dots$$

が成り立つ。

(A)より有限回で(\*)の作業は終わり, (B)より単位分数  $\frac{1}{p_k}$  は相異なるから, 1 より小さい正の有理数は相異なる単位分数 (分母は正の整数) の有限和で表される。

(おわり)