

## 数チャレ 第69回 (2006年10月)

自然数  $n$  に対して,  $(2 + \sqrt{3})^n$  の整数部分を  $a_n$  とする。

- (1)  $a_1 + 1 - (2 + \sqrt{3})$  および  $a_2 + 1 - (2 + \sqrt{3})^2$  を求めよ。
- (2)  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (3)  $a_{2006}$  の (10 進法表示における) 1 の位を求めよ。

解答

- (1)  $1^2 < 3 < 2^2$  より  $1 < \sqrt{3} < 2$  であるから

$$a_1 = \left[ 2 + \sqrt{3} \right] = 2 + 1 = 3$$

$$\therefore a_1 + 1 - (2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

$n = 2$  のとき

$$(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48}$$

であるが,  $6^2 < 48 < 7^2$  より

$$a_2 = \left[ 7 + \sqrt{48} \right] = 7 + 6 = 13$$

$$\therefore a_2 + 1 - (2 + \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

- (2)  $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ ,  $\beta = 2 - \sqrt{3}$  とおく。

(1)より  $a_n + 1 - (2 + \sqrt{3})^n = (2 - \sqrt{3})^n$  であることが予想できるので, まず

$$b_n = \alpha^n + \beta^n$$

が整数になることを  $n$  についての数学的帰納法で示す。

$$b_1 = \alpha + \beta = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4,$$

$$b_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (7 + 4\sqrt{3}) + (7 - 4\sqrt{3}) = 14$$

はともに整数である。

$$b_k = \alpha^k + \beta^k, \quad b_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$$

がともに整数であるとすれば,

$$b_{k+2} = \alpha^{k+2} + \beta^{k+2}$$

$$= (\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k)$$

$$= 4(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - (\alpha^k + \beta^k)$$

$$= 4b_{k+1} - b_k$$

も整数になるから, すべての自然数  $n$  に対して

$$b_n = \alpha^n + \beta^n \text{ は整数}$$

である。

$0 < \beta = 2 - \sqrt{3} < 1$  より  $0 < \beta^n < 1$  であるから

$$\alpha^n < b_n = \alpha^n + \beta^n < \alpha^n + 1 \quad \therefore b_n - 1 < \alpha^n < b_n$$

$a_n$  は  $\alpha^n$  の整数部分であるから,  $a_n = b_n - 1$  であり,

$$a_n = \alpha^n + \beta^n - 1 = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1 \quad (\text{答})$$

(3) (2)の考察より

$$a_n = b_n - 1, \quad b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であるから,  $\{b_n\}$  を消去すると

$$\begin{aligned} a_{n+2} + 1 &= 4(a_{n+1} + 1) - (a_n + 1) \\ \therefore a_{n+2} &= 4a_{n+1} - a_n + 2 \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 4a_{n+2} - a_{n+1} + 2 \\ &= 4(4a_{n+1} - a_n + 2) - a_{n+1} + 2 \\ &= 15a_{n+1} - 4a_n + 10 \end{aligned}$$

より

$$a_{n+3} - a_n = 5(3a_{n+1} - a_n + 2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また,

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 13, \quad a_{n+2} = 2(2a_{n+1} - a_n + 1) + a_n$$

より,  $a_n$  はつねに奇数であるから

$$a_{n+3} - a_n \text{ は偶数} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

である。2 と 5 は互いに素であるから, ①, ②より

$$a_{n+3} - a_n \text{ はつねに } 10 \text{ で割り切れ, } a_{n+3} \equiv a_n \pmod{10}$$

2006 = 3 × 668 + 2 より

$$a_{2006} \equiv a_2 \pmod{10}, \quad a_2 = 13$$

であるから,

$$a_{2006} \text{ の (10 進法表示における) 1 の位は } 3 \quad (\text{答})$$