

数チャレ 第70回 (2006年11月)

自然数 a, b, c, x に対して, 方程式

$$x^a + x^b = x^c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。

- (1) $a + b = c$ のとき, ①を満たす (a, b, c, x) の組をすべて求めよ。
- (2) 3辺の長さが a, b, c である直角三角形が存在するとき, ①は成り立たないことを示せ。

解答

- (1) $a \leq b$ とすると

$$a + b = c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

より, ①は

$$\begin{aligned} x^a(1 + x^{b-a}) &= x^{a+b} \\ 1 + x^{b-a} &= x^b \quad \therefore x^{b-a}(x^a - 1) = 1 \end{aligned}$$

整数の積が1であることと $x^{b-a} > 0$ を考えて

$$x^{b-a} = x^a - 1 = 1 \quad \therefore x^a = x^b = 2$$

素因数分解を考えると

$$a = b = 1, \quad x = 2$$

$a \geq b$ としても同様であり, ②より c も求めて,

$$(a, b, c, x) = (1, 1, 2, 2) \quad (\text{答})$$

- (2) ①が成り立つとして矛盾を導く。①より $a < c, b < c$ であるから,

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

が成り立つときだけ考えればよい。

$a = b$ とすると $2a^2 = c^2$ となるが, 素因数分解において左辺の2の指数は奇数, 右辺の2の指数は偶数となって, 分解の一意性に反する。対称性も考慮して

$$a < b < c \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

として示せば十分である。

このとき, ①の両辺を $x^a (> 0)$ で割って

$$1 + x^{b-a} = x^{c-a} \quad \therefore x^{b-a}(x^{c-b} - 1) = 1$$

$x^{b-a} > 0$ と積の組合せを考えて,

$$x^{b-a} = 1 \quad \text{かつ} \quad x^{c-b} - 1 = 1$$

$b - a > 0$ より $x = 1$ となるが, これは $x^{c-b} = 2$ と矛盾する。

よって, ①は成り立たない。

(証明おわり)