

数チャレ 第71回(2006年12月)

k を正の偶数(定数)とする。

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$$

を満たす正の整数 x, y, z は存在しないことを証明せよ。

解答

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz \quad (k \text{ は正の偶数}) \quad \dots\dots ①$$

を満たす正の整数 x, y, z が存在すると仮定して矛盾を導く。

$kxyz$ は偶数であるから,

x, y, z は3つとも偶数, または1つだけが偶数である。 x, y, z の最大公約数が2でちょうど n 回 ($n \geq 0$) 割れるとして

$$x = 2^n u, \quad y = 2^n v, \quad z = 2^n w \quad (u, v, w \text{ は正の整数}) \quad \dots\dots ②$$

と表すことができる。ここで,

u, v, w の少なくとも1つは奇数

である。

①, ②より

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2^n kuvw \quad \dots\dots ③$$

が成り立ち, この右辺は偶数であるから

u, v, w のうち2つは奇数, 1つは偶数

となるが, u, v, w についての対称性より

u, v は奇数, w は偶数

として一般性を失わない。

すると, w^2 および kw は4の倍数であるから, ③より

$u^2 + v^2$ は4の倍数

となるが, u, v は奇数であるから

$$u = 2s + 1, \quad v = 2t + 1 \quad (s, t \text{ は整数})$$

と表されて,

$$u^2 + v^2 = 4(s^2 + s + t^2 + t) + 2$$

は4の倍数とはならないから矛盾である。

以上より, ①を満たす正の整数 x, y, z は存在しない。

(証明おわり)