

数チャレ 第73回(2007年2月)

$\cos 1^\circ$ は有理数か。

解答

まず、自然数 n に対して、ある整数係数多項式 $P_n(x)$ が存在して

$$\cos n\theta = P_n(\cos \theta)$$

と表されることを、 n についての数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき、 $P_1(x) = x$ とすると

$$\cos \theta = P_1(\cos \theta)$$

(ii) $n = 2$ のとき、 $P_2(x) = 2x^2 - 1$ とすると、2倍角の公式より

$$\cos 2\theta = P_2(\cos \theta)$$

(iii) 整数係数多項式 $P_{k-1}(x)$ 、 $P_k(x)$ が存在して

$$\cos(k-1)\theta = P_{k-1}(\cos \theta), \quad \cos k\theta = P_k(\cos \theta)$$

が成り立つとすれば、加法定理より

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2 \cos k\theta \cos \theta$$

であるから、

$$P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P_{k-1}(x)$$

とおくと、 $P_{k+1}(x)$ も整数係数多項式であり、

$$\begin{aligned} \cos(k+1)\theta &= 2 \cos \theta \cos k\theta - \cos(k-1)\theta \\ &= 2 \cos \theta \cdot P_k(\cos \theta) - P_{k-1}(\cos \theta) \\ &= P_{k+1}(\cos \theta) \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上(i), (ii), (iii)より、整数係数多項式 $P_n(x)$ により $\cos n\theta = P_n(\cos \theta)$ と表されることが示された。

$\cos 1^\circ$ が有理数であるとするれば、有理数は加減乗除について閉じているから

$$\cos 30^\circ = P_{30}(\cos 1^\circ) \text{ は有理数}$$

となって、

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ は無理数}$$

であることと矛盾する。

よって、

$$\cos 1^\circ \text{ は無理数 (答)}$$

である。

(注) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ が無理数であることは、 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{n}$ (m, n は正の整数)と仮定すると、素因数分解の一意性に反することから示される。