

数チャレ 第74回 (2007年3月)

n を 2 以上の自然数とし, 整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

- (1) a_2, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (3) 各 n に対して, a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

出典: 2007 年 東北大学

解答

- (1) $x^2 = (x^2 - 6x - 12) + 6x + 12$ より

$$a_2 = 6, b_2 = 12 \quad (\text{答})$$

- (2) ある整式 $Q_n(x)$ を用いて

$$x^n = (x^2 - 6x - 12)Q_n(x) + a_n x + b_n$$

と表されるから, 両辺に x をかけて

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= (x^2 - 6x - 12) \cdot x Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x \\ &= (x^2 - 6x - 12) \cdot x Q_n(x) + a_n (x^2 - 6x - 12) + (6a_n + b_n)x + 12a_n \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = 6a_n + b_n, b_{n+1} = 12a_n \quad (\text{答})$$

- (3) (2)より, p が a_n と b_n の共通の素因数であるとすれば, p は a_{n+1} も b_{n+1} も割るから, $a_2 = 6, b_2 = 12$ より

少なくとも 2, 3 は a_n と b_n の公約数である。

a_{n+1} と b_{n+1} が 2, 3 以外に共通の素因数 p をもつとすれば, p は 12 および 6 と互いに素であるから, p は a_n と b_n の公約数である。したがって, p は a_2, b_2 の公約数となって矛盾するから,

a_n と b_n は 2, 3 以外に共通の素因数をもたない。

以上より,

a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2, 3 (答)

であり, それ以外に共通の素因数はもたない。