

数チャレ 第75回(2007年4月)

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n(a_n + 1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める. 次の問いに答えよ.

(1) $n \geq 2$ のとき $(2a_1 + 1)^2 + \sum_{k=2}^n (2a_k)^2 = (2a_n + 1)^2$ となることを示せ.

(2) $2a_n + 1$ と $2a_{n+1}$ の最大公約数は 1 であることを示せ.

(3) 次の 3 条件

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$,

(ii) x と y の最大公約数は 1,

(iii) z は y の倍数

を満たす 4 つの自然数の組 (x, y, z, w) は無数にあることを示せ.

出典：2007 年 大阪府立大学 経済学部

解答

(1) $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned}(2a_1 + 1)^2 + (2a_2)^2 &= 4a_1(a_1 + 1) + 1 + 4a_2^2 \\ &= 4a_2 + 1 + 4a_2^2 \\ &= (2a_2 + 1)^2\end{aligned}$$

$(2a_1 + 1)^2 + \sum_{k=2}^n (2a_k)^2 = (2a_n + 1)^2$ が成り立つとすれば,

$$\begin{aligned}(2a_1 + 1)^2 + \sum_{k=2}^{n+1} (2a_k)^2 &= (2a_n + 1)^2 + (2a_{n+1})^2 \\ &= 4a_n(a_n + 1) + 1 + 4a_{n+1}^2 \\ &= 4a_{n+1} + 1 + 4a_{n+1}^2 \\ &= (2a_{n+1} + 1)^2\end{aligned}$$

となるから, 数学的帰納法により, 2 以上のすべての自然数 n に対して

$$(2a_1 + 1)^2 + \sum_{k=2}^n (2a_k)^2 = (2a_n + 1)^2$$

が成り立つ。

(おわり)

(2) $2a_{n+1} = 2a_n(a_n + 1)$ であるから, $2a_n + 1$ が 2, $a_n, a_n + 1$ のいずれとも互いに素であることを示せばよい。

互除法により

$$\gcd(2a_n + 1, 2) = \gcd(1, 2) = 1$$

$$\gcd(2a_n + 1, a_n) = \gcd(1, a_n) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(2a_n + 1, a_n + 1) &= \gcd(2(a_n + 1) - 1, a_n + 1) \\ &= \gcd(-1, a_n + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから, $2a_n + 1$ と $2a_{n+1} = 2a_n(a_n + 1)$ は互いに素である。 (おわり)

(3) $x_n = 2a_n + 1$, $y_n = 2a_{n+1}$, $z_n = 2a_{n+2}$, $w_n = 2a_{n+2} + 1$ とおくと, (1)で示した式変形を辿ると

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = w_n^2$$

が成り立つ。(2)より x と y は互いに素であり,

$$z_n = 2a_{n+2} = 2a_{n+1}(a_{n+1} + 1) = y_n(a_{n+1} + 1)$$

となるから, 3条件 (i), (ii), (iii) を満たす。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{a_n\}$ が限りなく続くことより, 3条件を満たす4つの自然数の組 (x_n, y_n, z_n, w_n) は無数に存在する。 (おわり)