

## 数チャレ 第76回(2007年5月)

正の整数  $n = 2^a b$  (ただし  $a$  は 0 以上の整数で  $b$  は奇数) に対して  $f(n) = a$  とおくととき, 次の問いに答えよ。

(1) 正の整数  $k, m$  に対して  $f(km) = f(k) + f(m)$  であることを示せ。

(2)  $f(3^n + 1)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を求めよ。

(3)  $f(3^n - 1) - f(n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求めよ。

出典: 2007年 横浜国立大学 経済学部

### 解答

(1) 素因数分解を考えることにより

$$k = 2^a b, m = 2^c d \quad (a, c \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}, b, d \text{ は正の奇数})$$

と表すことができ,

$$f(k) = a, f(m) = c$$

であり, 指数法則より

$$km = 2^{a+c} bd$$

奇数の積  $bd$  は奇数であるから

$$f(km) = a + c = f(k) + f(m) \quad (\text{おわり})$$

(2)  $3^2 = 8 + 1$  に注目する。

$n$  が偶数のとき

$$n = 2m \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表されて,

$$\begin{aligned} 3^{2m} + 1 &= (8 + 1)^m + 1 \\ &= \sum_{k=0}^m {}^m C_k 8^k + 1 \\ &= (8 \text{ の倍数}) + 1^m + 1 \\ &= (8 \text{ の倍数}) + 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$f(3^{2m} + 1) = 1$$

$n$  が奇数のとき

$$n = 2m + 1 \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表されて,

$$\begin{aligned} 3^{2m+1} + 1 &= 3(8 + 1)^m + 1 \\ &= (8 \text{ の倍数}) + 3 \cdot 1^m + 1 \\ &= (8 \text{ の倍数}) + 2^2 \end{aligned}$$

であるから,

$$f(3^{2m+1} + 1) = 2$$

以上をまとめて

$$f(3^n + 1) = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(3)(i)  $n$  が奇数のとき

$$n = 2m + 1 \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表されて,

$$\begin{aligned} 3^{2m+1} - 1 &= 3(8 + 1)^m - 1 \\ &= (8 \text{ の倍数}) + 3 \cdot 1^m - 1 \\ &= (8 \text{ の倍数}) + 2 \end{aligned}$$

と変形できるから,

$$f(3^n - 1) - f(n) = 1 - 0 = 1$$

(ii)  $n$  が偶数のとき

$$n = 2^a b \quad (a \text{ は } 1 \text{ 以上の整数}, b \text{ は正の奇数})$$

と表されて, 平方の差を和と差の積に分解すると

$$\begin{aligned} 3^{2^a b} - 1 &= (3^{2^{a-1} b} + 1)(3^{2^{a-1} b} - 1) \\ &= (3^{2^{a-1} b} + 1)(3^{2^{a-2} b} + 1) \cdots (3^{2^b} + 1)(3^b + 1)(3^b - 1) \end{aligned}$$

(i)より

$$f(3^b - 1) = 1$$

であり, (1), (2)の結果とあわせると,

$$\begin{aligned} f(3^{2^a b} - 1) &= f(3^{2^{a-1} b} + 1) + f(3^{2^{a-2} b} + 1) + \cdots \\ &\quad \cdots + f(3^{2^b} + 1) + f(3^b + 1) + 1 \\ &= (a - 1) + 2 + 1 \\ &= a + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(3^n - 1) - f(n) = (a + 2) - a = 2$$

(i), (ii)をまとめて

$$f(3^n - 1) - f(n) = \begin{cases} 2 & (n \text{ が偶数}) \\ 1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \quad (\text{答})$$