

数チャレ 第77回(2007年6月)

平方して(10進表示による)各位の数の和をとると, もとの数と等しくなる(1桁の場合も含む)ような自然数をすべて求めよ。

解答

求める自然数を n とし, n の(10進表示による)桁数を d とすると

$$10^{d-1} \leq n < 10^d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore 10^{2d-2} \leq n^2 < 10^{2d}$$

であるから, n^2 は $2d-1$ 桁または $2d$ 桁である。

n^2 の各位の数の和が n に等しいから

$$n \leq 9 \times 2d = 18d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が必要であり, ①, ②より

$$10^{d-1} \leq 18d \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

である。 $10^2 > 18 \times 3$ であり, 3以上の整数 m に対して

$$10^{m-1} > 18m \implies 10^m > 180m = 18(m+9m) > 18(m+1)$$

であるから, ③を満たすのは

$$d = 1 \text{ または } d = 2$$

の場合に限られる。②も考えると

$$n \leq 36$$

の範囲だけ調べれば十分である。

$$1^2 = 1,$$

$$2^2 = 4 \neq 2, \quad 3^2 = 9 \neq 3, \quad 1+6 = 7 \neq 4, \quad 2+5 = 7 \neq 5,$$

$$3+6 = 9 \neq 6, \quad 4+9 = 13 \neq 7, \quad 6+4 = 10 \neq 8,$$

$$9^2 = 81, \quad 8+1 = 9,$$

$$1+0+0 = 1 \neq 10, \quad 1+2+1 = 4 \neq 11, \quad 1+4+4 = 9 \neq 12,$$

$$1+6+9 = 16 \neq 13, \quad 1+9+6 = 16 \neq 14, \quad 2+2+5 = 9 \neq 15,$$

$$2+5+6 = 13 \neq 16, \quad 2+8+9 = 19 \neq 17, \quad 3+2+4 = 9 \neq 18,$$

$$3+6+1 = 10 \neq 19, \quad 4+0+0 = 4 \neq 20, \quad 4+4+1 = 9 \neq 21,$$

$$4+8+4 = 16 \neq 22, \quad 5+2+9 = 16 \neq 23, \quad 5+7+6 = 18 \neq 24,$$

$$6+2+5 = 13 \neq 25, \quad 6+7+6 = 19 \neq 26, \quad 7+2+9 = 18 \neq 27$$

$28^2, 29^2, 30^2, 31^2$ は3桁であるから, 各位の数の和は $3 \times 9 = 27$ 以下の数であり, $32^2, 33^2, 34^2, 35^2, 36^2$ は2000未満の数であるから, 各位の数の和は $1+9 \times 3 = 28$ 以下の数である。

よって, 求める自然数は

$$n = 1, 9 \quad (\text{答})$$

ですべてである。