

数チャレ 第78回 (2007年7月)

3以上の整数 n に対して, $1, 2, 3, \dots, n$ を適当に3つのグループに分け, 各グループの整数の和がすべて等しくなるようにできるとき, n は「3分割可能である」と呼ぶことにする。

- (1) $n = 6$ は3分割可能であることを示せ。
- (2) $n = 10$ は3分割可能でないことを示せ。
- (3) 3以上の整数 n が3分割可能であるための必要十分条件を求めよ。

解答

- (1) $1, 2, 3, 4, 5, 6$ について

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$$

であるから, 6 は3分割可能である。 (証明おわり)

- (2) 10 が3分割可能であるとすれば, 1 から 10 までの和が3の倍数であることが必要であるが,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 = 55$$

は3で割り切れないから不可能である。 (証明おわり)

- (3) $1, 2, 3$ は相異なる数であるから, 3 は3分割可能ではない。

(2)と同様に考えて,

$$n = 3m + 1 \quad (m \text{ は整数})$$

と表されるならば,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(3m+1)(3m+2)$$

は3で割り切れないから, $3m+1$ は3分割不可能である。

$$1 + 4 = 2 + 3 = 5$$

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$$

$$1 + 2 + 3 + 6 = 4 + 8 = 5 + 7$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 + 9 = 7 + 8$$

より, $5, 6, 8, 9$ は3分割可能である。

(1)を参考にすると, 連続する6整数は

$$(n+1) + (n+6) = (n+2) + (n+5) = (n+3) + (n+4)$$

のように同数の3つの和に分割することができるから,

3分割可能かどうかは6を周期とする

ことになり, n が3分割可能であるための必要十分条件は

$$n \text{ は } 6 \text{ 以上の } 3 \text{ の倍数, または } 3 \text{ で割ると } 2 \text{ 余る } 5 \text{ 以上の整数} \quad (\text{答})$$

であることである。