

数チャレ 第79回(2007年8月)

整数 x, y, z は

$xyz \neq 0$, x と y は互いに素, z は 3 で割り切れない偶数 …… (*)

であるとする。

- (1) (*)のもとで $x^3 + y^3 = z^2$ が成り立つとすれば, $x + y$ と $x^2 - xy + y^2$ は互いに素であることを証明せよ。
- (2) (*)のもとでは, $x^3 + y^3 = z^2$ を満たす整数 x, y, z は存在しないことを証明せよ。

解答

- (1) $x + y$ と $x^2 - xy + y^2$ が共通の素因数 p をもつとすれば,

$$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$$

より $p \mid -3xy$ であり, p は素数であるから

$$p = 3 \text{ または } p \mid x \text{ または } p \mid y$$

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = z^2$ より $p \mid z$ でもあるから, $3 \nmid z$ より $p \neq 3$ であり,

$$p \mid x \text{ または } p \mid y$$

となる。 $p \mid x$ であるとすれば $p \mid x + y$ より $p \mid y$ となり, $p \mid y$ であるとすれば $p \mid x + y$ より $p \mid x$ となるから, いずれの場合も x と y が互いに素であることに反する。

よって, $x + y$ と $x^2 - xy + y^2$ は共通の素因数をもたないから, 互いに素である。

(証明おわり)

- (2) (*)のもとで, $x^3 + y^3 = z^2$ を満たす整数 x, y, z が存在すると仮定する。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

であることにも注意して, $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = z^2$ の両辺の素因数分解を考えると, (1)より

$$x + y = a^2, \quad x^2 - xy + y^2 = b^2$$

を満たす互いに素な正の整数 a, b が存在する。

$x^3 + y^3 = z^2$ は偶数であるから, x と y はともに偶数であるか, ともに奇数であり, x と y が互いに素であることより

$$x \text{ と } y \text{ はともに奇数, } a \text{ は偶数, } b \text{ は奇数}$$

である。 n を整数として

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$$

であることより

$$x^2 \equiv y^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

であり,

$$xy = x^2 + y^2 - b^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

であるから

$$x \equiv y \equiv 1 \pmod{4} \text{ または } x \equiv y \equiv 3 \pmod{4}$$

となり、いずれの場合も

$$x + y \equiv 2 \pmod{4}$$

となる。ところが、

$$x + y = a^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

であるから矛盾する。

よって、条件(*)のもとでは、 $x^3 + y^3 = z^2$ は成り立たない。 (証明おわり)

(注)

1° 「 z が 3 で割り切れない偶数」という条件をつけなければ、

$$x^3 + y^3 = z^2, \quad xyz \neq 0$$

を満たす互いに素な整数の組 (x, y, z) は無数に存在する。例えば、「数学ワンダーランド」のページの「方程式 $3x^2 + 3x + 1 = y^2$ の整数解について」を参照せよ。

2° 5 以上の素数 p に対して、 $p \mid z$, $2 \nmid z$ または $p \nmid z$, $2 \mid z$ ならば

$$x^p + y^p = z^2, \quad \gcd(x, y) = 1$$

を満たす整数 x, y, z が存在しないことが知られている。

A. Rotkiewicz, *On the Equation $x^p + y^p = z^2$,*

Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 30 (1982), 211-214