

## 数チャレ 第80回(2007年9月)

3次方程式  $x^3 - ax + a + 1 = 0$  が整数解をもつような整数  $a$  の値をすべて求めよ。

解答

整数解を  $n$  とすると

$$n^3 - an + a + 1 = 0$$

が成り立つから、

$$a(n-1) = n^3 + 1$$

であり、 $n-1=0$  と  $n^3+1=0$  は両立しないから

$$a = \frac{n^3 + 1}{n - 1} \quad \dots\dots (*)$$

多項式の除法により、恒等式

$$n^3 + 1 = (n-1)(n^2 + n + 1) + 2$$

が成り立つから、(\*)は

$$a = n^2 + n + 1 + \frac{2}{n-1}$$

と変形できて、 $a$  も  $n$  も整数であるから

$$\frac{2}{n-1} \text{ は整数}$$

である。したがって、

$$n-1 = -2, -1, 1, 2$$

$$\therefore n = -1, 0, 2, 3$$

(\*)に代入して

$$a = 0, -1, 9, 14 \quad (\text{答})$$