

数チャレ 第81回(2007年10月)

方程式 $3^m - 2^n = 1$ を満たす自然数 m, n について考える。

- (1) $n \geq 2$ のとき, m は偶数であることを示せ。
 (2) (m, n) の組をすべて求めよ。

解答

$$3^m - 2^n = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) 二項定理により

$$3^m = (4-1)^m = \sum_{k=0}^m {}^m C_k \cdot 4^{m-k} (-1)^k = (4 \text{ の倍数}) + (-1)^m$$

であるから,

$$3^m \equiv (-1)^m \pmod{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$n \geq 2$ のとき 2^n は 4 の倍数であるから, ①を満たすとすれば, ②より

$$(-1)^m \equiv 1 \pmod{4}$$

よって, m は偶数である。

(証明おわり)

(2) $n = 1$ のとき

$$3^m = 2 + 1 = 3 \quad \therefore m = 1$$

$n \geq 2$ のとき, (1)より

$$m = 2k \quad (k \text{ は自然数}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

と表されるから, ①は

$$2^n = 3^{2k} - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$3^k + 1, 3^k - 1$ はともに偶数であり,

$$(3^k + 1) - (3^k - 1) = 2$$

であるから,

$$\gcd(3^k + 1, 3^k - 1) = 2$$

である。 $0 < 3^k - 1 < 3^k + 1$ も考えあわせると, ④より

$$\begin{cases} 3^k - 1 = 2 & \dots\dots \textcircled{5} \\ 3^k + 1 = 2^{n-1} & \dots\dots \textcircled{6} \end{cases}$$

に定まる。⑤より

$$3^k = 2 + 1 = 3 \quad \therefore k = 1$$

このとき, ③より

$$m = 2$$

⑥より

$$2^{n-1} = 3 + 1 = 4 \quad \therefore n = 3$$

以上より, $3^m - 2^n = 1$ を満たす自然数の組 (m, n) は

$$(m, n) = (1, 1), (2, 3) \quad (\text{答})$$