

数チャレ 第82回 (2007年11月)

$2x^2 + y^2 = 5x^2y$ を満たす正の整数 x, y は存在しないことを示せ。

解答

$2x^2 + y^2 = 5x^2y$ を満たす正の整数 x, y が存在するとして、この式を変形すると

$$y^2 = 5x^2y - 2x^2 \quad \therefore \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 5y - 2$$

$\frac{y}{x}$ は有理数、その平方が整数であるから、 $\frac{y}{x}$ は整数であり、

$$y = xz$$

となる正の整数 z が存在する。このとき

$$z^2 = 5xz - 2 \quad \therefore z(5x - z) = 2$$

$z > 0$ より $5x - z > 0$ であり、積が 2 となる正の整数の組を考えると

$$(z, 5x - z) = (1, 2) \text{ または } (2, 1)$$

$z = 1$ の場合も $z = 2$ の場合も $x = \frac{3}{5}$ となって、 x は(正の)整数でない。

よって、 $2x^2 + y^2 = 5x^2y$ を満たす正の整数 x, y は存在しない。 (おわり)

別解

x^2, y^2 を 5 で割った余りで分類すると

x^2	0	0	0	1	1	1	4	4	4
y^2	0	1	4	0	1	4	0	1	4
$2x^2 + y^2$	0	1	4	2	3	1	3	4	2

となるから、 $2x^2 + y^2 = 5x^2y$ を満たす正の整数 x, y があるとすれば、 x, y はともに 5 の倍数で

$$x = 5x_1, \quad y = 5y_1 \quad (x_1, y_1 \text{ は正の整数})$$

と表される。このとき、

$$2(5x_1)^2 + (5y_1)^2 = 5(5x_1)^2(5y_1) \quad \therefore 2x_1^2 + y_1^2 = 5^2x_1^2y_1$$

となり、同様の考察を繰り返すことにより、任意の自然数 n に対して

$$2x_n^2 + y_n^2 = 5^{n+1}x_n^2y_n, \quad x = 5^n x_n, \quad y = 5^n y_n \quad (x_n, y_n \text{ は正の整数})$$

と表される。ところが、このことは x, y が何回でも 5 で割り切れることを意味するので矛盾する。

よって、 $2x^2 + y^2 = 5x^2y$ を満たす正の整数 x, y は存在しない。 (おわり)