

数チャレ 第83回(2007年12月)

方程式

$$(3x - 5)(5y - 7) + (5y - 7)(7z - 3) + (7z - 3)(3x - 5) = 0$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

解答

$3x - 5 > 0$, $5y - 7 > 0$, $7z - 3 > 0$ がすべて成り立つとすれば, 方程式の左辺は正になってしまうから, $7z - 3 \geq 7 - 3 = 4$ を考え,

$$3x - 5 \leq 0 \text{ または } 5y - 7 \leq 0$$

であることがわかる。 x, y は1以上の整数であるから,

$$x = 1 \text{ または } y = 1$$

である。

(i) $x = 1$ のとき

与えられた方程式を $5y - 7$ と $7z - 3$ の式とみて

$$-2(5y - 7) + (5y - 7)(7z - 3) - 2(7z - 3) = 0$$

$$(5y - 7 - 2)(7z - 3 - 2) = (-2)^2$$

$$\therefore (5y - 9)(7z - 5) = 4$$

$$7z - 5 \geq 7 - 5 = 2 \text{ より}$$

$$(5y - 9, 7z - 5) = (2, 2), (1, 4)$$

の可能性はあるが, それぞれ

$$(y, z) = \left(\frac{11}{5}, 1\right), \left(2, \frac{9}{7}\right)$$

となって不適である。

(ii) $y = 1$ のとき

与えられた方程式を $3x - 5$ と $7z - 3$ の式とみて

$$-2(3x - 5) - 2(7z - 3) + (7z - 3)(3x - 5) = 0$$

$$(3x - 5 - 2)(7z - 3 - 2) = (-2)^2$$

$$\therefore (3x - 7)(7z - 5) = 4$$

$$7z - 5 \geq 7 - 5 = 2 \text{ を考えて,}$$

$$(3x - 7, 7z - 5) = (2, 2), (1, 4)$$

$3x - 7 = 3(x - 3) + 2$ は3で割ると2余り, $7z - 5 = 7(z - 1) + 2$ は7で割ると2余るから,

$$(3x - 7, 7z - 5) = (2, 2) \quad \therefore (x, z) = (3, 1)$$

以上より, 求める自然数の組は

$$(x, y, z) = (3, 1, 1) \quad (\text{答})$$