

数チャレ 第86回(2008年3月)

3辺の長さが相異なる自然数である三角形について考える。この三角形の3辺の長さを a, b, c ($a < b < c$) とし, 三角形の周の長さを ℓ とする。また, 三角形の面積を S とする。次の問いに答えなさい。

- (1) この三角形の最も大きい角の大きさを θ とするとき, $\cos \theta$ の値を a, b, c を用いて表しなさい。
- (2) 上の (1) を利用して, 次の関係式が成り立つことを示しなさい。
$$16S^2 = \ell(\ell - 2a)(\ell - 2b)(\ell - 2c)$$
- (3) S が自然数であるとき, ℓ は偶数であることを示しなさい。
- (4) $S = 6$ となる組 (a, b, c) を求めなさい。
- (5) S の値が互いに異なる2つの素数の積になるのは, $S = 6$ の場合に限ることを示しなさい。

出典: 2008年 慶応義塾大学 医療看護学部

解答

- (1) θ は最大角で $a < b < c$ であるから, θ の対辺の長さは c である。余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \\ &= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2b^2} \\ &= \frac{\{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2\}}{4a^2b^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2b^2} \\ &= \frac{\ell(\ell-2c)(\ell-2b)(\ell-2a)}{4a^2b^2} \end{aligned}$$

面積公式より $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ であるから

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4a^2b^2 \sin^2 \theta \\ &= \ell(\ell-2a)(\ell-2b)(\ell-2c) \end{aligned} \quad (\text{おわり})$$

(3) $2a, 2b, 2c$ が偶数であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \text{「}\ell \text{ が奇数」} &\implies \text{「}\ell, \ell - 2a, \ell - 2b, \ell - 2c \text{ はすべて奇数」} \\ &\implies \text{「}16S^2 = \ell(\ell - 2a)(\ell - 2b)(\ell - 2c) \text{ も奇数」} \\ &\implies \text{「}S^2 \text{ は自然数ではない」} \end{aligned}$$

が成り立つから, 対偶をとると

$$\text{「}S \text{ が自然数」} \implies \text{「}S^2 \text{ は自然数」} \implies \text{「}\ell \text{ は偶数」} \quad (\text{おわり})$$

(4) (3)を踏まえて $\ell = 2k$ とおくと, (2)より

$$6^2 = k(k-a)(k-b)(k-c) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

三角形の成立条件より

$$k-c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} > 0$$

であり, $0 < a < b < c$ より

$$0 < k-c < k-b < k-a < k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$6^2 = 2^2 \times 3^2$ と $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を考えると, $k-c \geq 2$ ならば $6^2 \geq 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ となって矛盾するから

$$k-c = 1$$

に定まる。 $k-b = 3$ とすると, $\textcircled{2}$ より $k(k-a)(k-b) \geq 5 \times 4 \times 3 = 60$ となって矛盾するから $k-b = 2$ に定まり,

$$(k-c, k-b, k-a, k) = (1, 2, 3, 6)$$

$$\therefore (a, b, c) = (3, 4, 5) \quad (\text{答})$$

(5) (4)と同様に議論して, 三角形の成立条件と $a < b < c$ より

$$0 < k-c < k-b < k-a < k \quad \left(k = \frac{\ell}{2} \text{ は自然数}\right)$$

である。いま, S が 2 つの素数 p, q ($p < q$) の積になるとすれば,

$$S^2 = p^2 q^2 = k(k-a)(k-b)(k-c)$$

(4)と同様に, $k-c = p$ ならば $k-b \geq q, k-a \geq q, k \geq q$ となって矛盾するから

$$k-c = 1$$

に限られ, $k-b = q$ とすると

$$p^2 q = p \times pq = p^2 \times q$$

をどのように 2 つの自然数の積に分けても, 一方の数は q 以下となるから,

$$k-b = p \quad \therefore (k-c, k-b, k-a, k) = (1, p, q, pq)$$

このとき,

$$(k-c) + (k-b) + (k-a) = 1 + p + q, \quad k = pq$$

$a+b+c = 2k$ より

$$pq = k = 1 + p + q < q + q + q = 3q \quad \therefore p < 3$$

p は素数であるから $p = 2$ に決まり, $pq = 1 + p + q$ より $q = 3$ に決まる。

したがって, $S = 6$ に限られる。

(おわり)