

数チャレ 第87回(2008年4月)

以下の問いに答えよ。

- (1) x を有理数とする。 $7x^2$ が整数ならば、 x は整数であることを示せ。
- (2) a, b を整数とする。 $a^2 - 7b^2$ が4の倍数ならば、 a と b はともに偶数であることを示せ。
- (3) r は整数、 s は有理数とする。 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば、 s は整数であることを示せ。

出典：2008年 千葉大学

解答

- (1) x が有理数であるとすれば、互いに素な自然数 m, n を用いて

$$x = \pm \frac{m}{n}$$

と表される。

$$7x^2 = \frac{7m^2}{n^2}$$

は整数であるから $7m^2$ は n^2 の倍数であるが、 m^2 と n^2 は互いに素である(共通な素因数をもたない)から、

7 は n^2 で割り切れる。

7 は(1でない)平方因数をもたないから

$$n^2 = 1 \quad \therefore n = 1$$

よって、 $x = \pm m$ は整数である。

(証明おわり)

- (2) k を整数として、

$$(2k)^2 = 4k^2$$

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$$

となるから、偶数の平方は4の倍数、奇数の平方は4で割ると1余る。

a^2, b^2 および $a^2 - 7b^2$ について4で割った余りは

a^2	0	0	1	1
b^2	0	1	0	1
$a^2 - 7b^2$	0	1	1	2

ですべての場合が尽くされるから、 $a^2 - 7b^2$ が4の倍数となるのは、 a と b がともに偶数である場合に限られる。

(証明おわり)

(3) $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2 = t$ が整数ならば,

$$r^2 - 7(2s)^2 = 4t \text{ は } 4 \text{ の倍数} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

であり, r は整数であるから

$$7(2s)^2 = r^2 - 4t \text{ も整数} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

である。

$2s$ は有理数であるから, \textcircled{B} および(1)より

$$2s \text{ は整数}$$

であり, \textcircled{A} および(2)より

$$2s \text{ は偶数}$$

となる。

したがって,

$$s = \frac{2s}{2} \text{ は整数}$$

である。

(証明おわり)