

数チャレ 第88回(2008年5月)

任意の整数 n に対して, $f(n) = \frac{n^3}{a} + \frac{n^2}{b} + \frac{n}{c}$ が整数となるような 2 以上の整数 a, b, c の組をすべて求めよ。

解答

必要条件として $f(1)$ および $f(-1)$ は整数であるから,

$$f(1) + f(-1) = \frac{2}{b}, \quad f(1) - f(-1) = \frac{2}{a} + \frac{2}{c}$$

はともに整数であり, b は 2 以上の整数であるから

$$b = 2$$

である。

$f(2) = \frac{8}{a} + 2 + \frac{2}{c}$ も整数であるから,

$$\frac{6}{a} = \left(\frac{8}{a} + \frac{2}{c}\right) - \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{c}\right), \quad \frac{6}{c} = 4\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{c}\right) - \left(\frac{8}{a} + \frac{2}{c}\right)$$

はいずれも整数であり, $a \geq 2, c \geq 2, \frac{2}{a} + \frac{2}{c}$ が整数であることより

$$(a, c) = (6, 3), (2, 2), (3, 6)$$

に限られる。

以下, 十分性をチェックする。

連続する 3 整数の 1 つは 3 で割り切れるから, その積は 3 で割り切れる。隣り合う整数の一方は偶数であるから, その積は 2 で割り切れる。3 と 2 は互いに素であるから, 連続する 3 整数の積は 6 で割り切れることに注意する。

(i) $a = 6, b = 2, c = 3$ のとき

$$f(n) = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

は任意の整数 n に対して整数となる。

(ii) $a = b = c = 2$ のとき

$$f(n) = \frac{n^3 + n^2 + n}{2}$$

であるが, $f(1) = \frac{3}{2}$ であるから条件を満たさない。

(ii) $a = 3, b = 2, c = 6$ のとき

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\ &= \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

3連続整数の積 $n(n-1)(n+1)$ は6で割り切れ、隣り合う整数の積 $n(n+1)$ は偶数であるから、任意の整数 n に対して $f(n)$ は整数となる。

以上より、求める整数の組は

$$(a, b, c) = (6, 2, 3), (3, 2, 6) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(注)

1° $a \geq 2, b = 2, c \geq 2$ より

$$f(1) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

であることに注目すると、正の整数 $f(1)$ は

$$f(1) = 1$$

に定まり、必要条件の時点で $a = b = c = 2$ の場合も排除されて

$$(a, b, c) = (6, 2, 3), (3, 2, 6)$$

の場合に絞られる。

2° $a = 3, b = 2, c = 6$ の場合の十分性のチェックにおいて、連続する整数の積の性質を用いる代わりに、

$$f(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \sum_{k=1}^n k^2$$

を根拠として、整数であることを導いてもよい。