

## 数チャレ 第 89 回 (2008 年 6 月)

3 辺の長さがすべて整数である直角三角形において、直角をはさむ 2 辺の長さを  $a, b$  とし、斜辺の長さを  $c$  とする。 $a$  が素数であるとき、次の各問いに答えよ。

- (1)  $c = b + 1$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $b$  は 4 で割り切れることを示せ。

解答

- (1) 三平方の定理より

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つから、これを变形すると

$$a^2 = (c + b)(c - b)$$

となる。

$$c + b > c - b > 0$$

であることに注意すると、 $a$  が素数であることより

$$\begin{cases} c + b = a^2 & \dots\dots \textcircled{2} \\ c - b = 1 & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\textcircled{3}$ より

$$c = b + 1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

である。

(証明おわり)

- (2)  $\textcircled{4}$ を $\textcircled{2}$ に代入して

$$a^2 = 2b + 1$$

$$\therefore b = \frac{a^2 - 1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$a, b$  は整数であるから  $a^2$  は奇数であり、 $a$  も奇数である。そこで、

$$a = 2n - 1 \quad (n \text{ は正の整数})$$

とおくと、 $\textcircled{5}$ より

$$b = \frac{(2n - 1)^2 - 1}{2} = 2n(n - 1)$$

と表される。 $n$  と  $n - 1$  の一方は偶数であるから

$b$  は 4 で割り切れる。

(証明おわり)

(注) 本問は、2006 年 2 月駿台高 2 東大模試で出題された。