

## 数チャレ 第90回 (2008年7月)

$\{a_n\}$  は各項が 0 と 1 のいずれかから成る数列であるとする。

$$\frac{3}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

である数列  $\{a_n\}$  をすべて求めよ。

解答

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{ より}$$

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 3)$$

は条件を満たす数列  $\{a_n\}$  の一つである。以下, これ以外の数列を考える。

$a_1 = 0$  とすると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

となって題意の条件を満たさないから,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0$$

ここで, 数列  $\{a_n\}$  が

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

の場合に限定されることを背理法で示すために,

3 以上のある整数  $m$  に対して  $a_m = 0$

であると仮定すると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &\leq \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \sum_{k=3}^{m-1} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \frac{\frac{1}{2^3} \left(1 - \frac{1}{2^{m-3}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2^{m-3} - 1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2^{m-2} - 1}{2^m} < \frac{1}{2} + \frac{2^{m-2}}{2^m} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となって条件を満たさなくなるから,

3 以上のすべての整数  $n$  に対して  $a_n = 1$

でなければならない。

以上より，求める数列  $\{a_n\}$  は

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 3)$$

または

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_n = 1 \quad (n \geq 3)$$

(答)

である。