

数チャレ 第92回 (2008年9月)

$\frac{3a+2}{2a^2+1}$ が整数となるような有理数 a を求めよ。

解答

$$\frac{3a+2}{2a^2+1} = k \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} 3a+2 &= k(2a^2+1) \\ \therefore 2ka^2 - 3a + (k-2) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (*)$$

1° $k=0$ のとき

$$a = -\frac{2}{3}$$

2° $k \neq 0$ のとき

必要条件として, a は実数であるから

$$\begin{aligned} (\text{判別式}) &= (-3)^2 - 4 \cdot 2k \cdot (k-2) \geq 0 \\ \therefore 8k^2 - 16k - 9 &\leq 0 \end{aligned}$$

k は 0 でない整数であるから,

$$\begin{aligned} 8 \times (-1)^2 - 16 \times (-1) - 9 &= 15 > 0, \\ 8 \times 0^2 - 16 \times 0 - 9 &= -9 < 0, \\ 8 \times 2^2 - 16 \times 2 - 9 &= -9 < 0, \\ 8 \times 3^2 - 16 \times 3 - 9 &= 15 > 0 \end{aligned}$$

を考え,

$$k=1 \text{ または } k=2$$

(*)より

$$\begin{aligned} k=1 \text{ のとき } 2a^2 - 3a - 1 &= 0 \\ (\text{判別式}) &= 17 \text{ は平方数でないから不適。} \end{aligned}$$

$$k=2 \text{ のとき } 4a^2 - 3a = a(4a-3) = 0$$

$$\therefore a = 0, \frac{3}{4}$$

以上より, 求める有理数は

$$a = -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4} \quad (\text{答})$$