

数チャレ 第93回 (2008年10月)

素数 p, q は $3 < p < q$ を満たし, $\frac{pq-1}{3-1}, \frac{3q-1}{p-1}, \frac{3p-1}{q-1}$ はいずれも整数となる。素数 (p, q) の組をすべて求めよ。

解答

$$l = \frac{pq-1}{3-1}, \quad m = \frac{3q-1}{p-1}, \quad n = \frac{3p-1}{q-1}$$

とおくと, $p < q$ より

$$n < \frac{3q-1}{q-1} = \frac{3(q-1)+2}{q-1} = 3 + \frac{2}{q-1}$$

$q-1 > 2$ であり, n は整数であるから

$$n = 1, 2, 3$$

(i) $n = 1$ のとき

$$3p-1 = q-1 \quad \therefore q = 3p$$

となって, q が素数であることに反する。

(ii) $n = 2$ のとき

$$3p-1 = 2(q-1) \quad \therefore q = \frac{3p+1}{2}$$

これを m の式に代入すると,

$$m = \frac{3q-1}{p-1} = \frac{3(3p+1)-2}{2(p-1)} = \frac{9p+1}{2(p-1)} = \frac{1}{2} \left(9 + \frac{10}{p-1} \right)$$

は整数であるから, $\frac{10}{p-1}$ が整数となることが必要であり, $p \geq 5$ より

$$p-1 = 5 \text{ または } 10 \quad \therefore p = 6 \text{ または } 11$$

p は素数であるから

$$p = 11$$

であり, このとき

$$q = \frac{3p+1}{2} = 17 (\text{素数}), \quad m = \frac{1}{2}(9+1) = 5, \quad l = \frac{pq-1}{3-1} = 93$$

となって, 条件をすべて満たす。

(iii) $n = 3$ のとき

$$3p-1 = 3(q-1) \quad \therefore m = \frac{3q-1}{p-1} = \frac{3p+1}{p-1} = 3 + \frac{4}{p-1}$$

$p \geq 5, p-1 \mid 4$ より $p = 5$ に限られるが, $3q = 17$ となって不適である。

以上より, 求める素数 (p, q) の組は

$$(p, q) = (11, 17) \quad (\text{答})$$