

数チャレ 第95回(2008年12月)

x の 2 次方程式

$$ax^2 + (a^2 - 1)x + a^2 + 1 = 0$$

が整数解をもつとき，有理数 a の値を求めよ。

解答

整数解を n とすると，

$$an^2 + (a^2 - 1)n + a^2 + 1 = 0$$

これを a について整理すると，

$$(n + 1)a^2 + n^2a + (1 - n) \dots\dots (*)$$

(i) $n + 1 = 0$ のとき，(*)より

$$a = -2$$

(ii) $n + 1 \neq 0$ のとき

a の 2 次方程式(*)の判別式を D とすると，

$$D = (n^2)^2 - 4(n + 1)(1 - n) = n^4 + 4n^2 - 4$$

a は有理数であるから， D が有理数の平方であることが必要であるが， D は整数であるから

$$D = n^4 + 4n^2 - 4 = m^2$$

を満たす 0 以上の整数 m が存在する。

$$(n^2 + 2)^2 - 8 = m^2$$

$$(n^2 + 2)^2 - m^2 = 8$$

$$\therefore (n^2 + 2 + m)(n^2 + 2 - m) = 8$$

$n^2 + 2 + m \geq n^2 + 2 - m$ ， $n^2 + 2 + m > 0$ を考えて，

$$(n^2 + 2 + m, n^2 + 2 - m) = (8, 1), (4, 2)$$

$n^2 + 2 + m - (n^2 + 2 - m) = 2m$ より 2 数の偶奇は等しいから

$$n^2 + 2 + m = 4, n^2 + 2 - m = 2$$

の場合に絞られ， $n + 1 \neq 0$ も考えると

$$m = 1, n^2 = 1 \quad \therefore n = 1$$

このとき整数解 1 をもつから十分であり，(*)は

$$2a^2 + a = a(2a + 1) = 0$$

となるから， $a \neq 0$ より

$$a = -\frac{1}{2}$$

以上より，求める有理数 a は

$$a = -2, -\frac{1}{2} \quad (\text{答})$$