

数チャレ 第96回 (2009年1月)

1から2009までの和

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2009 = 21 \times 96145$$

は21で割り切れるが、次に1から西暦年までの整数の和が平成年で割り切れるのは何年か。

解答

平成 n 年が題意の条件を満たすのは、

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1988} k = \frac{1}{2n} (n+1988)(n+1989) \\ &= \frac{1}{2} \left(n + 3977 + \frac{1988 \times 1989}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(n + 3977 + \frac{2^2 \times 3^2 \times 7 \times 13 \times 17 \times 71}{n} \right) \end{aligned}$$

が整数になるときであり、 n が奇数であるとき

$$N \in \mathbf{Z} \iff n \mid 3^2 \times 7 \times 13 \times 17 \times 71 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

n が偶数であるとき

$$\begin{aligned} N \in \mathbf{Z} &\iff \frac{2^2 \times 3^2 \times 7 \times 13 \times 17 \times 71}{n} \text{が奇数} \\ &\iff 4 \mid n \text{ かつ } \frac{n}{4} \mid 3^2 \times 7 \times 13 \times 17 \times 71 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$n = 21$ の次に①または②を満たす n は $n = 28$ であるから、
2016(平成28)年 (答)

(注) ①を満たす自然数 n は

$$1, 3, 7, 9, 13, 17, 21, 39, \dots\dots$$

②を満たす自然数 n は

$$4, 12, 28, 36, 52, \dots\dots$$

であり、②を満たす自然数は①を満たす自然数をそれぞれ4倍したものである。