

数チャレ 第97回 (2009年2月)

0以上の整数 x に対して, $C(x)$ で x の下2桁を表すことにする. たとえば, $C(12578) = 78$, $C(6) = 6$ である. n を2でも5でも割り切れない正の整数とする.

- (1) x, y が0以上の整数のとき, $C(nx) = C(ny)$ ならば, $C(x) = C(y)$ であることを示せ.
- (2) $C(nx) = 1$ となる0以上の整数 x が存在することを示せ.

出典: 1999年 京都大学 文系

解答

- (1) $C(nx) = C(ny)$ ならば, nx と ny の下2桁は等しいから,
 $nx - ny = n(x - y)$ は100で割り切れる。

n は2でも5でも割り切れないから, n は $100 = 2^2 \cdot 5^2$ と互いに素であり, $x - y$ は100で割り切れる。すなわち,

$$C(x) = C(y)$$

である。

(証明おわり)

- (2) 0以上99以下の整数 x に対して $C(x) = x$ であるから, (1)の対偶により

$C(0 \cdot n), C(1 \cdot n), C(2n), \dots, C(99n)$ は相異なる値

である。下2桁の数は全部で100通りであるから, この中の1つは1であり,

$C(nx) = 1$ となる0以上の整数 x が存在する。 (証明おわり)