

数チャレ 第98回(2009年3月)

自然数 a, b, c, d は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

- (1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。
- (2) a と b が互いに素で, c と d がどちらも素数 p の倍数ならば, $p = 5$ であることを示せ。ただし, 2つの自然数が互いに素とは, 1以外の正の公約数をもたないことをいう。

出典: 2009年 千葉大学

解答

$$\begin{cases} c = 4a + 7b & \dots\dots ① \\ d = 3a + 4b & \dots\dots ② \end{cases}$$

(1) ①, ②より

$$\begin{aligned} c + 3d &= (4a + 7b) + 3(3a + 4b) \\ &= 13a + 19b \\ &= 4(2a + b) + 5(a + 3b) \end{aligned}$$

であるから,

$$c + 3d \text{ が } 5 \text{ の倍数}$$

ならば,

$$4(2a + b) \text{ は } 5 \text{ の倍数}$$

であり, 5と4は互いに素であるから

$$2a + b \text{ は } 5 \text{ の倍数}$$

である。

(証明おわり)

(2) ② \times 7 - ① \times 4 より

$$5a = 7d - 4c \quad \dots\dots ③$$

① \times 3 - ② \times 4 より

$$5b = 3c - 4d \quad \dots\dots ④$$

c と d がどちらも素数 p の倍数ならば, ③, ④より

$$5a, 5b \text{ はともに } p \text{ の倍数}$$

である。 $p \neq 5$ とすれば, 素数 p は a と b の公約数となり, a と b が互いに素であることに反するから

$$p = 5$$

である。

(証明おわり)