

数チャレ 第99回 (2009年4月)

次の問いに答えよ。

- (1) $x^2 - y^2 = 2009$ をみたす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。
- (2) $x^2 + y^2 = 41$ をみたす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。
- (3) 式 $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ を因数分解せよ。
- (4) n を正の整数とする。 $x^2 + y^2 = 2009^n$ をみたす正の整数 x, y が存在することを示せ。

出典：2009年 横浜国立大学 経済学部

解答

- (1) $x^2 - y^2 = 2009$ を変形すると
$$(x + y)(x - y) = 7^2 \times 41$$
 $x + y > 0, x + y > x - y$ を考えて,
$$(x + y, x - y) = (2009, 1), (287, 7), (49, 41)$$
 $\therefore (x, y) = (1005, 1004), (147, 140), (45, 4)$ (答)
- (2) $6^2 < 41 < 7^2$ に注目すると
$$x^2 = 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$$
の各場合だけ調べれば十分であり,
$$x^2 + y^2 = 41 \iff (x, y) = (4, 5), (5, 4)$$
 (答)
- (3) $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$
$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)$$
$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$
 (答)
- (4) $2009 = 7^2 \times 41$ および (2) より
$$2009 = 35^2 + 28^2$$
 $a_k \geq b_k > 0$ なる整数 a_k, b_k を用いて
$$2009^k = a_k^2 + b_k^2$$
と表されるとすれば, (3) より
$$2009^{k+1} = (a_k^2 + b_k^2) \times (35^2 + 28^2)$$
$$= (35a_k - 28b_k)^2 + (28a_k + 35b_k)^2$$
と表される。 $a_k \geq b_k > 0$ より
$$35a_k - 28b_k > 0, 28a_k + 35b_k > 0$$

であり,

$$a_{k+1} = \max \{35a_k - 28b_k, 28a_k + 35b_k\}$$

$$b_{k+1} = \min \{35a_k - 28b_k, 28a_k + 35b_k\}$$

とおくと, a_{k+1}, b_{k+1} は

$$a_{k+1} \geq b_{k+1} > 0$$

を満たす整数である。

したがって, 数学的帰納法の論理により, 任意の正の整数 n に対して

$$a_n^2 + b_n^2 = 2009^n, \quad a_n \geq b_n > 0$$

を満たす整数 a_n, b_n が存在する。特に,

$$x^2 + y^2 = 2009^n$$

を満たす正の整数 x, y が存在する。

(証明おわり)

(注) (2), (3)のヒントがあるので, 形を見つけることは意外に易しい。正の数の差は必ずしも正の数ではないので, むしろ「正の整数の存在」を示す方が証明の中心となる。一見, 絶対値をとれば片付くようにも思えるが, 「0でないこと」自体を帰納的に論じることはできない。