

## 数チャレ 第100回(2009年5月)

- (1) 整数からなる公差1の等差数列  $a, b, c, d$  で

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$$

をみたくものを求めよ。

- (2) 0でない整数からなる等比数列  $a, b, c, d$  で

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$$

をみたくものは存在しないことを示せ。

出典：2009年 京都府立医科大学

### 解答

- (1)  $a, b, c, d$ はこの順に公差1の等差数列をなすから

$$a = b - 1, \quad c = b + 1, \quad d = b + 2$$

とおくことができ、

$$(b - 1)^3 + b^3 + (b + 1)^3 = (b + 2)^3$$

$$3b^3 + 6b = b^3 + 6b^2 + 12b + 8$$

$$2b^3 - 6b^2 - 6b - 8 = 0$$

$$b^3 - 3b^2 - 3b - 4 = 0$$

$$\therefore (b - 4)(b^2 + b + 1) = 0$$

$$b^2 + b + 1 = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ より}$$

$$b = 4$$

よって、求める数は

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad d = 6 \quad (\text{答})$$

- (2) 0でない整数  $a, b, c, d$ がこの順に等比数列をなすとき

$$\text{公比は } r = \frac{b}{a}$$

であり、

$$c = br = \frac{b^2}{a}, \quad d = cr = \frac{b^3}{a^2}$$

$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ が成り立つとすれば、

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^3 = \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^3 \quad \therefore a^3(a^6 + a^3b^3 + b^6) = b^9$$

$a$ と $b$ の最大公約数を $d$ とし、 $a = d\alpha$ 、 $b = d\beta$ とおくと

$$\alpha^3(\alpha^6 + \alpha^3\beta^3 + \beta^6) = \beta^9$$

$\beta^9$ は $\alpha^3$ の倍数であるが、互いに素であるから

$$\alpha = \pm 1$$

(i)  $\alpha = 1$  のとき

$$1 + \beta^3 + \beta^6 = \beta^9 \quad \therefore \beta^3(\beta^6 - \beta^3 - 1) = 1$$

$\beta^3, \beta^6 - \beta^3 - 1$  はともに整数であるから

$$\beta^3 = \beta^6 - \beta^3 - 1 = 1 \quad \text{または} \quad \beta^3 = \beta^6 - \beta^3 - 1 = -1$$

に限られるが、どちらも成り立たない。

(ii)  $\alpha = -1$  のとき

$$-(1 - \beta^3 + \beta^6) = \beta^9 \quad \therefore \beta^3(\beta^6 + \beta^3 - 1) = -1$$

$\beta^3, \beta^6 + \beta^3 - 1$  はともに整数であるから

$$(\beta^3, \beta^6 + \beta^3 - 1) = (1, -1) \quad \text{または} \quad (-1, 1)$$

に限られるが、どちらも成り立たない。

以上より、0 でない整数からなる等比数列  $a, b, c, d$  で  $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$  をみたくものは存在しない。 (証明おわり)

(注) 本問は「 $a, b, c, d$  の順に等差数列、等比数列をなす」という題意だと思われるが、「順不同で」とも解釈できないわけではない。ただ、順不同だとしても、(1)で

$$a = -3, b = -4, c = -5, d = -6$$

が追加される以外は同じ結果となり、同様の議論が繰り返されるだけである。