

## 数チャレ 第101回 (2009年6月)

$m, n$  は自然数であるとする。

(1)  $m^2 - n^2$  が素数ならば,  $m = n + 1$  であることを示せ。

(2)  $(n+1)^2 - n^2$  が平方数でない合成数ならば,

$$(n+1)^2 - n^2 = a^2 - b^2, \quad n > a > b$$

を満たす自然数  $a, b$  が存在することを示せ。

### 解答

(1)  $p = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$  が素数であるとすれば,

$$m+n > 0, \quad m+n > m-n$$

に注意して

$$m+n = p, \quad m-n = 1$$

の場合に限られるから,

$$m = \frac{p+1}{2}, \quad n = \frac{p-1}{2} \quad \therefore m = n + 1$$

(おわり)

(2)  $(n+1)^2 - n^2$  が平方数でない合成数ならば,  $s > t \geq 2$  を満たす整数  $s, t$  を用いて

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 = st$$

と表される。このとき,  $s, t$  がともに奇数であるから,

$$s = a + b, \quad t = a - b$$

とおくと

$$a = \frac{s+t}{2}, \quad b = \frac{s-t}{2} \text{ はともに正の整数}$$

であり,

$$(n+1)^2 - n^2 = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$t \geq 3$  (2 以上の奇数) であるより

$$n - s = \frac{st - 1}{2} - s > \frac{st - s}{2} - s = \frac{s(t-3)}{2} \geq 0$$

となるから,

$$n > s = a + b > a > b$$

(おわり)