

数チャレ 第101回(2009年6月)

m, n は自然数であるとする。

(1) $m^2 - n^2$ が素数ならば, $m = n + 1$ であることを示せ。

(2) $(n + 1)^2 - n^2$ が平方数でない合成数ならば,
 $(n + 1)^2 - n^2 = a^2 - b^2, n > a > b$
を満たす自然数 a, b が存在することを示せ。

解答

(1) $p = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ が素数であるとすれば,
 $m + n > 0, m + n > m - n$

に注意して

$$m + n = p, m - n = 1$$

の場合に限られるから,

$$m = \frac{p+1}{2}, n = \frac{p-1}{2} \quad \therefore m = n + 1$$

(おわり)

(2) $(n + 1)^2 - n^2$ が平方数でない合成数ならば, $s > t \geq 2$ を満たす整数 s, t を用いて
 $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 = st$

と表される。このとき, s, t がともに奇数であるから,

$$s = a + b, t = a - b$$

とおくと

$$a = \frac{s+t}{2}, b = \frac{s-t}{2} \text{ はともに正の整数}$$

であり,

$$(n + 1)^2 - n^2 = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$t \geq 3$ (2以上の奇数)であるより

$$n - s = \frac{st - 1}{2} - s > \frac{st - s}{2} - s = \frac{s(t - 3)}{2} \geq 0$$

となるから,

$$n > s = a + b > a > b$$

(おわり)