

数チャレ 第102回 (2009年7月)

(1) n を 3 以上の自然数であるとし, n 以下の素数を p_1, p_2, \dots, p_r とするとき,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k_1=0}^n \frac{1}{p_1^{k_1}} \sum_{k_2=0}^n \frac{1}{p_2^{k_2}} \times \dots \times \sum_{k_r=0}^n \frac{1}{p_r^{k_r}}$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1)を用いて, 素数が無数にあることを示せ。

解答

(1) n 以下の任意の自然数 k の素因数は p_1, p_2, \dots, p_r に限られるから,

$$k = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r} \quad (e_i \text{ は非負整数})$$

と表される。任意の自然数 m に対して $m \leq 2^m$ が成り立つ(厳密には帰納法による)から, $p_i \geq 2$ より

$$n \leq 2^n \leq p_i^n$$

であり, 各指数 e_i は $0 \leq e_i \leq n$ である。各 k に対して素因数分解は相異なるから,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k_1=0}^n \frac{1}{p_1^{k_1}} \sum_{k_2=0}^n \frac{1}{p_2^{k_2}} \times \dots \times \sum_{k_r=0}^n \frac{1}{p_r^{k_r}}$$

(証明おわり)

(2) 素数が有限個の p_1, p_2, \dots, p_r しかないとすれば, (1)より

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k_1=0}^n \frac{1}{p_1^{k_1}} \sum_{k_2=0}^n \frac{1}{p_2^{k_2}} \times \dots \times \sum_{k_r=0}^n \frac{1}{p_r^{k_r}} \leq \left(\sum_{m=0}^n \frac{1}{2^m} \right)^r$$

$0 < \frac{1}{2} < 1$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \right)^r = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)^r = 2^r$$

ところが,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} &= 1 + \sum_{m=1}^n \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &> 1 + \sum_{m=1}^n (2^m - 2^{m-1}) \frac{1}{2^m} = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

であるから, 矛盾する。よって, 素数は無数にある。

(証明おわり)

(注) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ は定積分を用いて導いてもよい。