

数チャレ 第104回 (2009年9月)

10進法で表された2桁の自然数 k は、次の条件を満たす。

- (*) 平方した数 k^2 を十の位と百の位の間で区切ってできる
2つの数の和が k に等しい。

例えば、 $99^2 = 9801$ を98と01に分け、01は1とみなすと、 $98 + 1 = 99$ であるから、99は(*)を満たす。

- (1) 条件(*)が成り立つならば、 $k(k-1)$ は99で割り切れることを示せ。
(2) 条件(*)を満たす99以外の2桁の自然数 k をすべて求めよ。

解答

- (1) k^2 の上2桁を a 、下2桁を b とおくと

$$k = a + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$k^2 = 100a + b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

② - ① より

$$k(k-1) = 99a \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

よって、 $k(k-1)$ は99で割り切れる。

(おわり)

- (2) (1)より $k(k-1)$ が99で割り切れることが必要で、 $99 = 3^2 \times 11$ および k と $k-1$ が互いに素であることより、99以外の2桁の自然数では

(i) k が11で割り切れ、 $k-1$ が9で割り切れる

(ii) k が9で割り切れ、 $k-1$ が11で割り切れる

のいずれかである。(k は99未満であるから、 $k-1$ も99で割り切れない。)

- (i) $k = 11, 22, 33, \dots, 88$ の各場合を直接考えて

$$(k, k-1) = (11, 10), (22, 21), (33, 32), (44, 43),$$

$$(55, 54), (66, 65), (77, 76), (88, 87)$$

$k-1$ が9で割り切れるのは

$$k = 55$$

- (ii) $k-1 = 11, 22, 33, \dots, 88$ の各場合を直接考えて

$$(k-1, k) = (11, 12), (22, 23), (33, 34), (44, 45),$$

$$(55, 56), (66, 67), (77, 78), (88, 89)$$

k が9で割り切れるのは

$$k = 45$$

以上より、条件(*)を満たす99以外の2桁の自然数 k であるためには

$$k = 45, 55$$

であることが必要である。逆に、

$$45^2 = 2025, \quad 20 + 25 = 45$$

$$55^2 = 3025, \quad 30 + 25 = 55$$

であるから十分であり，求める自然数 k は

$$k = 45, 55 \quad (\text{答})$$

である。

(注) 99 で割り切れることは，一般には必要条件にすぎない。例えば，3桁の数なら $k = 198 (= 2 \times 99)$ は $k(k-1)$ が 99 で割り切れるが， $198^2 = 39204$ はどのように区切っても和は 198 とはならない。また，(1)の証明から，99 で割り切れることを示すのに， $(a+b)^2 = 10a+b$ となることは無関係であることもわかる。

本問のように，平方数 K^2 を 10 進表示して適当に上の桁と下の桁を分けて加えると K と等しくなる自然数 K をカプレカ数(Kaprekar number)という。