

数チャレ 第105回 (2009年10月)

整数 x, y, z が方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ を満たすとき, 積 xyz は 60 で割り切れることを示せ。

解答

60 = 3 × 4 × 5 であり, 3, 4, 5 はどの 2 つも互いに素であるから,

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots\dots (*)$$

のとき xyz が 3, 4, 5 それぞれで割り切れることを示せばよい。

1° 3 で割り切れない整数は $3n \pm 1$ (n は整数) と表されて

$$(3n \pm 1)^2 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$$

となるから,

「 xyz が 3 で割り切れない」
 \implies 「 x, y, z がすべて 3 で割り切れない」
 $\implies x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{3}$
 $\implies x^2 + y^2 \not\equiv z^2 \pmod{3}$

対偶をとると,

$$(*) \implies \text{「} xyz \text{ は 3 で割り切れる」}$$

2° 平方数を 5 で割った余りを考えると, n を整数として

$$(5n)^2 = 5 \cdot 5n^2$$

$$(5n \pm 1)^2 = 5(5n^2 \pm 2n) + 1$$

$$(5n \pm 2)^2 = 5(5n^2 \pm 4n) + 4$$

であるから,

x^2	0	0	0	1	1	1	4	4	4
y^2	0	1	4	0	1	4	0	1	4
$x^2 + y^2$	0	1	4	1	2	0	4	0	3

が起こる得るすべての場合である。(*) を満たすとき

$$x^2 + y^2 = z^2 \not\equiv 2, 3 \pmod{5}$$

であるから, x, y, z の少なくとも一つは 5 で割り切れ, xyz は 5 で割り切れる。

3° (*) を満たすとき,

「 x, y, z はすべて偶数」または「 x, y, z の 1 つだけが偶数」
 であるから, xyz が 4 で割り切れることを示すには,
 x, y, z のうち 2 つが奇数で, 1 つが偶数
 である場合だけ示せばよい。

n を整数として,

$$(2n - 1)^2 = 4n(n - 1) + 1$$

であり, 隣り合う整数の一方は偶数であるから,

奇数の平方は 8 で割ると 1 余る

ことに注意する。

x と y が奇数であるとすれば,

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad z^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

であるから, (*) を満たすならば x, y の一方は偶数であるが, 対称性から

x が偶数, y, z が奇数

である場合だけ示せば十分である。このとき,

$$y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad x^2 = z^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であり, x は 4 で割り切れるから, xyz は 4 で割り切れる。

(証明おわり)