

数チャレ 第106回 (2009年11月)

x の方程式 $4x^2 - ax + a = 0$ が、整数でない正の有理数を解に持つとき、整数 a の値を求めよ。

解答

整数でない正の有理数解は

$$x = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な正の整数, } q \geq 2)$$

と表され、

$$4\left(\frac{p}{q}\right)^2 - a \cdot \frac{p}{q} + a = 0$$

を満たすから、

$$4p^2 - apq + aq^2 = 0 \quad \therefore 4p^2 = aq(p - q)$$

q は $4p^2$ の約数であるが、 p^2 と q は互いに素であるから

q は 4 の約数

であり、 $q \geq 2$ より

$$q = 2 \text{ または } q = 4$$

である。

1° $q = 2$ のとき

$$\begin{aligned} a &= \frac{2p^2}{p-2} = \frac{2(p-2+2)^2}{p-2} = 2 \cdot \frac{(p-2)^2 + 4(p-2) + 4}{p-2} \\ &= 2(p-2) + 8 + \frac{8}{p-2} \end{aligned}$$

は整数であるから

$p-2$ は 8 の約数

であり、 $p \geq 1$ 、 $p-2 \neq 0$ であるから

$$p = 1, 3, 4, 6, 10$$

このうち、 $q = 2$ と互いに素なものは

$$p = 1, 3$$

2° $q = 4$ のとき

$$\begin{aligned} a &= \frac{p^2}{p-4} = \frac{(p-4+4)^2}{p-4} = \frac{(p-4)^2 + 8(p-4) + 16}{p-4} \\ &= (p-4) + 8 + \frac{16}{p-4} \end{aligned}$$

は整数であるから

$p-4$ は 16 の約数

であり、 $p \geq 1$ 、 $p-4 \neq 0$ より

$$p = 2, 3, 5, 6, 8, 12, 20$$

このうち, $q = 4$ と互いに素なものは

$$p = 3, 5$$

以上より, 条件を満たす p, q は

$$(p, q) = (1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 4)$$

であり, $a = \frac{4p^2}{q(p-q)}$ より

$$a = -2, 18, -9, 25 \quad (\text{答})$$

(別解)

公式より 2 次方程式 $4x^2 - ax + a = 0$ の解は

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16a}}{8}$$

であるから, 有理数解をもつための条件は

$$a^2 - 16a \text{ が有理数の平方}$$

となることであり, $a^2 - 16a$ は整数であるから

$$a^2 - 16a = b^2$$

を満たす非負整数 b が存在することが条件である。これを变形して,

$$(a - 8)^2 - 64 = b^2$$

$$(a - 8)^2 - b^2 = 64$$

$$\therefore (a + b - 8)(a - b - 8) = 64$$

$a + b - 8, a - b - 8$ について

$$a + b - 8 \geq a - b - 8, (a + b - 8) - (a - b - 8) = 2b$$

であることに注意して, 積が 64 となる整数の組を考えると,

$$(a + b - 8, a - b - 8) = (32, 2), (16, 4), (8, 8),$$

$$(-8, -8), (-4, -16), (-2, -32)$$

それぞれ連立方程式を解いて,

$$(a, b) = (25, 15), (18, 6), (16, 0), (0, 0), (-2, 6), (-9, 15)$$

各場合について 2 解 $x = \frac{a \pm b}{8}$ は

$$\frac{25 \pm 15}{8} = 5, \frac{5}{4}, \frac{18 \pm 6}{8} = 3, \frac{3}{2}, \frac{16 \pm 0}{8} = 2,$$

$$\frac{0 \pm 0}{8} = 0, \frac{-2 \pm 6}{8} = \frac{1}{2}, -1, \frac{-9 \pm 15}{8} = \frac{3}{4}, -3$$

であり, 整数でない正の有理数解をもつような a の値は

$$a = 25, 18, -2, -9 \quad (\text{答})$$