

数チャレ 第107回 (2009年12月)

自然数 n に対して,

$$N = 1^{2009} + 2^{2009} + 3^{2009} + \cdots + n^{2009}$$

と定める。

- (1) $k^{2009} + (n+1-k)^{2009}$ が $n+1$ で割り切れることに注目して, $2N$ が $n+1$ で割り切れることを証明せよ。
- (2) N が $\frac{1}{2}n(n+1)$ で割り切れることを証明せよ。

解答

(1) 二項定理を用いると

$$\begin{aligned}(n+1-k)^{2009} &= \sum_{r=0}^{2009} {}_{2009}C_r (n+1)^{2009-r} (-k)^r \\ &= (n+1 \text{ の倍数}) + (-k)^{2009} \\ &= (n+1 \text{ の倍数}) - k^{2009}\end{aligned}$$

と変形されるから,

$$k^{2009} + (n+1-k)^{2009} \text{ は } n+1 \text{ の倍数}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}2N &= N + N = \sum_{k=1}^n k^{2009} + \sum_{k=1}^n (n+1-k)^{2009} \\ &= \sum_{k=1}^n \{k^{2009} + (n+1-k)^{2009}\}\end{aligned}$$

は $n+1$ で割り切れる。

(証明おわり)

(2) (1)と同様にして, 二項定理より

$$\begin{aligned}(n-k)^{2009} &= (n \text{ の倍数}) + (-k)^{2009} \\ &= (n \text{ の倍数}) - k^{2009}\end{aligned}$$

であるから,

$$2N = \sum_{k=1}^n k^{2009} + \sum_{k=0}^n (n-k)^{2009} = \sum_{k=1}^n \{k^{2009} + (n-k)^{2009}\} + n^{2009}$$

は n で割り切れる。

n と $n+1$ は互いに素であるから, (1)の結果とあわせて

$$2N = n(n+1)M$$

を満たす自然数 M が存在し,

$$N = \frac{1}{2}n(n+1)M$$

は $\frac{1}{2}n(n+1)$ で割り切れる。

(証明おわり)