

## 数チャレ 第108回 (2010年1月)

$a, b, c$  は  $2 \leq a < b < c$  を満たす整数であり,  $b - a$  を  $c$  で割った余りは 1,  $c - a$  を  $b$  で割った余りは 1,  $c - b$  を  $a$  で割った余りは 1 である。

- (1)  $b - a$  を求めよ。
- (2)  $c$  を  $b$  で割ったときの商を  $a$  で割った余りを求めよ。
- (3)  $c = 2010$  のとき,  $(a, b)$  の値の組をすべて求めよ。

### 解答

- (1)  $b - a$  を  $c$  で割った余りは 1 であるから

$$b - a = cd + 1$$

を満たす整数  $d$  が存在する。  $0 < b - a < c$  より

$$b - a = 1 \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

- (2)  $c - a$  を  $b$  で割った余りは 1 であるから

$$c - a = bk + 1 \quad \therefore c = a + bk + 1$$

を満たす整数  $k (\geq 0)$  が存在し, ①より

$$c = a + (a + 1)k + 1 = (a + 1)(k + 1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

また,

$$c - b = (a + 1)(k + 1) - (a + 1) = (a + 1)k = ak + k$$

を  $a$  で割った余りは 1 であるから

$$k = aq + 1 \quad (q \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表され, ①, ②とあわせて

$$c = b(k + 1) = b(aq + 2) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$c$  を  $b$  で割った商  $aq + 2$  を  $a$  で割った余りは

$$a = 2 \text{ のとき } 0, \quad a \geq 3 \text{ のとき } 2 \quad (\text{答})$$

- (3) ①, ③より

$$c = (a + 1)(aq + 2)$$

2010 の素因数分解を考えて,

$$(a + 1)(aq + 2) = 2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

を満たす  $(a, b)$  を求めると, まず  $q = 0$  のとき

$$2(a + 1) = 2010 \quad \therefore a = 1004$$

このとき, ①より

$$b = 1005$$

$q \geq 1$  のとき,  $a + 1 < aq + 2$  となるから  $67 \nmid a + 1$  であり,

$$(3 \leq) a + 1 = 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

の場合に限られる。

- (i)  $a + 1 = 3$  のとき, ④より

$$a = 2, \quad 2q + 2 = 670$$

となつて  $q = 334$  が存在し, ④より

$$b = 3$$

(ii)  $a + 1 = 5$  のとき, ④より

$$a = 4, \quad 4q + 2 = 402$$

となつて  $q = 100$  が存在し, ④より

$$b = 5$$

(iii)  $a + 1 = 6$  のとき, ④より

$$a = 5, \quad 5q + 2 = 335$$

となるが, これを満たす整数  $q$  は存在しない。

(iv)  $a + 1 = 10$  のとき, ④より

$$a = 9, \quad 9q + 2 = 201$$

となるが, これを満たす整数  $q$  は存在しない。

(iv)  $a + 1 = 15$  のとき, ④より

$$a = 14, \quad 14q + 2 = 134$$

となるが, これを満たす整数  $q$  は存在しない。

(vi)  $a + 1 = 30$  のとき, ④より

$$a = 29, \quad 29q + 2 = 67$$

となるが, これを満たす整数  $q$  は存在しない。

以上より, 求める  $(a, b)$  の組は

$$(a, b) = (2, 3), (4, 5), (1004, 1005) \quad (\text{答})$$