

## 数チャレ 第110回 (2010年3月)

4で割ると余りが1である自然数全体の集合を  $A$  とする。すなわち,

$$A = \{4k + 1 \mid k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $x$  および  $y$  が  $A$  に属するならば, その積  $xy$  も  $A$  に属することを証明せよ。
- (2) 0以上の偶数  $m$  に対して,  $3^m$  は  $A$  に属することを証明せよ。
- (3)  $m, n$  を 0以上の整数とする。  $m+n$  が偶数ならば  $3^m 7^n$  は  $A$  に属し,  $m+n$  が奇数ならば  $3^m 7^n$  は  $A$  に属さないことを証明せよ。
- (4)  $m, n$  が 0以上の整数とする。  $3^{2m+1} 7^{2n+1}$  の正の約数のうち  $A$  に属する数全体の和を  $m$  と  $n$  を用いて表せ。

出典: 2010年 広島大学

### 解答

- (1)  $x, y \in A$  のとき

$$x = 4a + 1, \quad y = 4b + 1 \quad (a, b \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と表され,

$$xy = (4a + 1)(4b + 1) = 4(4ab + a + b) + 1$$

$4ab + a + b$  は 0以上の整数であるから

$$xy \in A \quad (\text{証明おわり})$$

- (2)  $m = 2n$  ( $n$  は 0以上の整数) のとき

$$3^m = 9^n = (8 + 1)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot 8^k = 4 \left( 2 \sum_{k=1}^n {}_n C_k \cdot 8^{k-1} \right) + 1$$

$2 \sum_{k=1}^n {}_n C_k \cdot 8^{k-1}$  は 0以上の整数 ( $n = 0$  のとき 0) であるから

$$3^m \in A \quad (\text{証明おわり})$$

- (3) 二項定理より

$$\begin{aligned} 3^m 7^n &= (4 - 1)^m (8 - 1)^n \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \cdot 4^{m-k} (-1)^k \sum_{l=0}^n {}_n C_l \cdot 8^{n-l} (-1)^l \\ &= 4q_{m,n} + (-1)^{m+n} \quad (q_{m,n} \text{ は整数}) \end{aligned}$$

$m+n$  が偶数ならば  $(-1)^{m+n} = 1$  であり,  $3^m 7^n \geq 1$  より  $q_{m,n} \geq 0$  であるから  
 $3^m 7^n \in A$

$m+n$  が奇数ならば  $(-1)^{m+n} = -1$  であり,  $3^m 7^n = 4k+3$  ( $k$  は整数) の形になるから

$$3^m 7^n \notin A$$

(証明おわり)

(4)  $3^{2m+1} 7^{2n+1}$  の正の約数は

$$3^k 7^l \quad (k, l \text{ は } 0 \leq k \leq 2m+1, 0 \leq l \leq 2n+1 \text{ を満たす整数})$$

の形の整数であり, このうち  $A$  に属するものは (3) より

$$k+l \text{ が偶数}$$

のものであるから, 求める和は

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n 3^{2i} 7^{2j} + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n 3^{2i+1} 7^{2j+1} \\ &= (1+3 \times 7) \times \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n 3^{2i} 7^{2j} \\ &= 22 \times \frac{9^{m+1} - 1}{9 - 1} \times \frac{49^{n+1} - 1}{49 - 1} \\ &= \frac{11}{192} (9^{m+1} - 1)(49^{n+1} - 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$